image
not
available





TRATTATO

DI

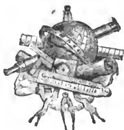
NAVIGAZIONE

ESPOSTO IN 50 LEZIONI

DA GAETANO PODEROSO

Professore della Real Marina.







NAPOLI,

Real Tipografia Militare

1841.



A spese di Federico Stikler.

INDICE DELLE MATERIE.

PARTE PRIMA

NOZIONI PRELIMINARI.

PARTE SECONDA

NAVIGAZIONE PER ISTIMA.

PARTE TERZA

TRIGONOMETRIA SFERICA.

PARTE QUARTA

ASTRONOMIA NAUTICA.

Que' piloti della marina mercantile che si trovassero poco versati nelle conoscenze matematiche, potranno trasandare le formole riguardanti la costruzione delle tavole.

TRATTATO DI NAVIGAZIONE.



PARTE PRIMA

NOZIONI PRELIMINARI.



LEZIONE PRIMA.

Breve cenno del sistema planetario.

In qualunque punto della terra l'uomo si trovi, distingue al di sopra del suo capo una volta azzurra, cosparsa d'innumerevoli punti brillantissimi, rischiarata la notte dalla luna, e durante il giorno inondata di luce per la presenza del sole.

Fin dall'infanzia delle umane società, hanno gli uomini procurato assegnare delle ragioni, bene o mal fondate, onde spiegare i fenomeni de'quali erano testimoni, ed indicarne le cause; e quindi di tutte le scienze l'astronomia è la più antica non solo, ma ancora quella che ha più esercitato il talento dell'uomo. Da principio, per l'ignoranza de'tempi, spingendosi nel campo sterminato delle congetture, esercitarono gli uomini l'attività e l'energia della loro immaginazione più a comporre sistemi fantastici, che ad osservare e studiare i fenomeni, onde dedurne le leggi che li determinano, e pervenire con queste alla formazione di un'ipotesi, che elevata poscia a sistema, avesse mostrata esatta corrispondenza tra i fatti osservati e la datane spiegazione.

2. Noi intanto faremo menzione de'più rinomati di tali sistemi, sì per la lunga celebrità che si ebbero, la quale ne induce a dimostrarne la falsità, sì per aggiugnere maggiore autorità e certezza al sistema oggigiorno adottato.

Il primo errore è ancora il più naturale, cioè quello di credere la terra immobile nello spazio, e tutti gli astri in movimento intorno ad essa; giacchè tutte le apparenze menavano alla conferma di questa ipotesi. Si adottò quindi da tempo antichissimo quello che poi fu detto *sistema di Tolomeo*, avendolo questo celebre astronomo adottato nel suo *Almagesto*, ch'è uno de' più bei monumenti che ci abbia trasmessi l'antichità. Ma questo sistema trovavasi introdotto da molti secoli prima, e fu similmente seguito da' suoi antecessori Eratostene, Ipparco, Metone ed altri sapienti dell'Egitto e della Grecia.

3. Secondo questa antica credenza, la terra che per lungo tempo erasi creduta piana, venne riconosciuta come sferica, ed occupava immobilmente un luogo fisso nello spazio; mentre il cielo, simile ad una volta solida, le girava intorno in 24 ore trasportando seco gli astri ed imprimendo loro un movimento comune, per la qual cosa fu detto *Primo Mobile*. Ma non potendo negare un moto proprio al sole, alla luna ed ai pianeti, riguardarono tai corpi come indipendenti dal cielo stellato, o almeno accordarono loro la proprietà di scostarsi ogni giorno di certa quantità in una sfera propria, senzachè il primo mobile mancasse perciò di trasportarli seco nella rotazione diurna.

Si contavano allora sette pianeti, ciascuno de' quali procedeva nella propria orbita con differente velocità, e i diametri di esse orbite crescevano nell'ordine seguente: la luna che compiva la sua rivoluzione in giorni $29\frac{1}{2}$ circa (*fig.* 1), Mercurio in 3 mesi, Venere in 7, il sole in un anno, Marte in due, Giove in dodici, Saturno in trenta.

L'idea di perfezione in oltre, che si attribuiva alla forma circolare non permetteva di dubitare che le orbite de' pianeti non fossero circonferenze di cerchio, delle quali la terra, occupava il centro comune.

4. Ma, come spiegare con tal sistema i cangiamenti di distanza dalla terra de' due pianeti Mercurio e Venere, i quali hanno rispetto alla terra, come s'intenderà in appresso, due congiunzioni l'una superiore e l'altra inferiore, e sembra che abbiano solo delle brevi elongazioni rispetto al sole; mentre Marte, Giove e Saturno si allontanano dal sole a tutte le distanze angolari, fino ad essere con esso in opposizione rispetto alla terra?

Tolomeo spiega le inegualità delle distanze con situare la terra alquanto discosta dal centro delle orbite; e le stazioni e retrogradazioni, con la teorica degli epicicli.

Egli suppone ogni pianeta descrivere un piccolo cerchio, il cui centro descriva un cerchio nello spazio, intorno alla terra. Sia T la terra (*fig.* 2.) fissa nello spazio ed al centro dell'orbita AB; il pianeta percorrerebbe il cerchio PDP'C, mentre il centro di questo percorresse l'orbita circolare AB. A questo modo il movimento del pianeta era diretto o retrogrado secondochè trovavasi su l'una o l'altra delle parti opposte P' e P del piccolo cerchio; ed allorquando trovavasi il pianeta in C e D avvenivano le stazioni, giacchè il movimento era osservato nel senso delle tangenti TC, TD a tal cerchio.

Ma ciò che fece rigettare questa opinione fu che non si riusciva a dare in tal guisa che una grossolana spiega del fenomeno, e poco atta a misurarne l'estensione; ed il calcolo non potea renderne ragione esatta. D'altronde come concepire la forza motrice della rivoluzione che il pianeta eseguiva intorno del punto immateriale O, e l'altra che obbligava questo centro a descrivere un sì gran cerchio intorno della terra? I pianeti poteano è vero descrivere degli epicicli, ma bisognava che le stazioni e le retrogradazioni non avvenissero che quando il pianeta era prossimo all'opposizione: cosa che obbligava a supporre delle relazioni speciali fra i diametri de' cerchi; e per far corrispondere il calcolo ai fenomeni bisognava ammettere che l'epiciclo fosse prodotto da tre o quattro circonferenze. Il cerchio quindi descritto dal centro dell'epiciclo aveva un centro che descriveva un secondo cerchio, il quale aveva altresì la proprietà di percorrere un terzo cerchio, e così di seguito sino a quello che avea per centro il centro della terra!

5. Il sistema degli Egiziani descritto da Vitruvio supponeva similmente la terra immobile nello spazio; ma le orbite di Mercurio e di Venere aveano per centro il centro del sole, e questo trasportava seco tali pianeti nel suo moto annuale. Questo sistema (*fig.* 3.), benchè non giustificava che l'andamento dei detti due pianeti, aveva almeno il vantaggio di rappresentare le cose al modo stesso che si offrono allo sguardo, eccetto solo che si avrebbero dovuto considerare le orbite el-

littiche e non circolari: in quanto agli altri pianeti niente era diverso dall' ipotesi tolemaica.

6. Il sistema del mondo, qual' è al presente da tutti riconosciuto, si è che la terra giri sul proprio asse in 24 ore, e compisca il cammino della sua orbita intorno al sole nel corso di un anno: teorica che fu più di sette secoli prima di Tolomeo professata da Pitagora, che avealа ricevuta da' sacerdoti egizj; ma per le continue e mortali persecuzioni che costava a coloro che la professavano cadde in oblio, e le furono sostituite le altre due, che quantunque erronee furono seguite per quattordici secoli. Finalmente Copernico dopo 36 anni di osservazioni e di meditazioni pubblicò il suo sistema, nel quale conforme alla verità confirmata dal calcolo e dal concorso di tutte le teoriche conosciute, la terra è considerata mobile come gli altri pianeti intorno al sole.

7. Non tutti gli astronomi però adottarono da principio così fatta idea; ed il celebre Tico-Brahé fu del numero di questi. Ma non potendo egli d' altronde ammettere la teorica degli epicicli, niente più che ingegnosissima, procurò di comporre un sistema, che potesse nel tempo stesso render ragione dei fenomeni, e prestarsi al calcolo; quindi ricorse al sistema egiziano, nel quale solamente poteva render conto dei movimenti di Mercurio e di Venere, ed innestò questo a quello di Copernico.
Secondo Tico-Brahé la terra (*fig. 4.*) è fissa nello spazio; la luna le gira intorno, ed a distanza maggiore il sole; il quale poi è centro delle orbite circolari di tutti gli altri pianeti. Questa disposizione soddisfa a tutte le condizioni del problema, se non che le orbite bisognerebbe che fossero ellittiche e non circolari. Ma intanto come si farebbe a spiegare la nutazione, l'aberrazione e la precessione, di cui in seguito parleremo? mentre al contrario le leggi dell' attrazione vi si applicano interamente.

8. Tutti questi sistemi essendo solo prodotti dell' immaginazione, non hanno niente di dimostrato; e quello di Copernico è il solo nel quale, facendo ellittiche le orbite, possono concordare i fenomeni ed il calcolo. E Keplero il cui genio ha saputo scoprirne le leggi, ha pro-

dotto pruove incontrastabili della disposizione dell'universo. Ma a quale proprietà della materia, a quale causa son dovuti que' movimenti così regolari, così concordi, le cui medesime piccole ineguaglianze costituiscono la prova più evidente delle leggi da cui dipendono? era riserbato al sommo genio di Newton lo scoprirle.

Così adunque l'idea primitiva è dovuta a Keplero: ma egli non fece che semplicemente asserire la legge dell'attrazione, senza prova e senz'applicazione; per cui la gloria della scoverta della teorica dell'attrazione devesi interamente a Newton, il quale ha dimostrato che la materia esercita una forza attrattiva; ha dato l'intensità di tal forza; ed ha comprovato ch'essa produce tutti i fenomeni celesti: o piuttosto, che questa potenza essendo una proprietà inerente alla materia è la causa di tutti i fenomeni che il cielo ne presenta.

LEZIONE II.

Principali definizioni e leggi di Keplero.

9. Dopo aver seguito rapidamente nelle loro escogitazioni i dotti dell'antichità, passiamo à dir qualche cosa di più circostanziato sul sistema planetario, siccome è ricevuto da' sapienti di tutte le incivilite nazioni moderne, e cominciamo perciò dalle principali definizioni.

10. Diconsi *stelle fisse que' corpi celesti che splendono di luce propria come il sole, e che offrono costantemente la stessa disposizione tra loro qualunque sia il punto della terra dal quale si contemplino, e qualunque sia il luogo della terra nella sua orbita.*

11. La voce *pianeta*, avvegnachè siasi spesso adoperata per esprimere in senso generico tutti i corpi celesti, pure secondo la sua greca origine significa *errante:* e noi intendiamo per pianeta *quel corpo opaco che gira intorno al sole, dal quale riceve la luce che tramanda;* imperciocchè si è osservato che i pianeti non solo hanno un movimento nello spazio, ed un moto di rotazione ciascuno intorno ad un suo asse; ma allo sguardo offrono ancora delle fasi come quelle della luna.

12. Dicesi ***pianeta secondario o satellite** quel corpo opaco che in vece di girare intorno al sole, si aggira intorno ad uno de' primari.*

13. Noi contiamo al presente 11 pianeti che nell' ordine della loro distanza dal sole, comiuciando dalla minore, sono i seguenti, accanto a ciascuno de' quali indichiamo il segno che si usa a dinotarlo (*fig. 5.*) Mercurio ☿, Venere ♀, la Terra ♁, Marte ♂, Vesta ⚶; Giunone ⚵, Pallade ⚴, Cerere ⚳, Giove ♃, Saturno ♄ ed Urano ♅; il sole inoltre s' indica col segno ☉.

14. Questi soglionsi distinguere ancora in *inferiori* e *superiori:* i primi son quelli la cui distanza dal sole è minore di quella della terra; cioè Mercurio e Venere; gli altri, quelli la cui distanza è maggiore. Fra tutti, quattro solamente nelle loro rivoluzioni menano seco dei satelliti, cioè, la terra 1, che chiamiamo luna, ed additiamo in generale col segno ☽ o pure ☾; Giove 4; Saturno 7; Urano 6.

15. *Afelio* s' intende quel punto dell' orbita di un pianeta che ha la massima distanza dal sole; e dicesi *perielio* quel punto che vi ha la distanza minima.

16. *Apogeo* è quel punto dell' orbita di un pianeta che ha la massima distanza dalla terra; siccome dicesi *perigeo* quel punto che vi ha la minima.

17. *Nodi* s'intendono que' due punti dell'orbita di un pianeta ne' quali essa s' interseca col piano dell' orbita terrestre.

18. *Congiunzione* dicesi quella posizione per la quale i centri di due astri sono in linea retta col centro della terra, e questa trovisi in uno degli estremi. *Opposizione* dicesi quando, nel caso anzidetto, il centro della terra trovisi interposto fra i centri degli altri due astri.

19. *Posizione delle orbite.* I pianeti si muovono tutti nel medesimo senso, descrivendo ellissi delle quali il sole occupa uno de' fuo-

chi, ed i cui piani s'intersecano per conseguenza in linee rette che passano tutte pel centro del sole; tali curve sono più o meno inclinate tra loro di pochi gradi, ma tutte diversamente, senza che neppure due di esse siano nello stesso piano. Il tempo che un pianeta impiega a percorrere l'intera sua orbita dicesi durata della *rivoluzione*, o pure anno del pianeta.

20. *Rotazione*. Il disco di parecchi di questi pianeti presentando delle macchie, l'osservazione delle quali ha fatto scorgere in essi un moto di rotazione intorno ad un proprio asse; si è dovuto conchiudere che lo abbiano ancora quelli ne' quali fin' oggi non ancora si è potuto distintamente ciò osservare.

21. *Schiacciamento*. I pianeti di cui la rotazione è stata riconosciuta, sono tutti schiacciati nel senso dell'asse di tal movimento, e lo schiacciamento cresce in generale nella ragione della velocità.

22. *Inclinazione degli assi*. La rotazione de' pianeti cagiona per ogni punto di ognuno di essi una successione di giorni e di notti; ma questi giorni e queste notti sarebbero della stessa durata costantemente, se gli assi non fossero inclinati alle rispettive orbite, e noi veggiamo che questa inclinazione degli assi esiste in tutti i pianeti, quindi dobbiamo riguardarla come legge generale.

23. *Leggi di Keplero*. Questo illustre astronomo dalla sublimità del suo ingegno fu inspirato a comparare le dimensioni delle orbite de' pianeti, co' tempi ch' essi impiegano a percorrerle; e ad introdurre nel calcolo i quadrati ed i cubi di così fatti elementi. Da ciò dedusse le tre seguenti verità, confermate dal fatto e poi dal calcolo, generalmente conosciute sotto la denominazione di *leggi di Keplero*.

1.° *I raggi vettori descrivono aie proporzionali ai tempi;*

2.° *Le orbite sono ellissi di cui il sole occupa il fuoco comune;*

3.° *I quadrati de' tempi delle rivoluzioni sono tra loro come i cubi de' grandi assi delle orbite.*

24. Il celebre astronomo *Bode* paragonando le distanze de' pianeti, e facendo la distanza media della terra al sole = 10, stabilì la seguente serie, che quantunque non corrisponda esattamente, pure merita di esser ricordata, come quella che conferisce molto ad aiutare in ciò la memoria; e giustifica inoltre l'idea di Keplero sulla esistenza presunta di un pianeta tra Marte e Giove, come poi si è in complesso verificata: distanza di

Mercurio	$= 4 \ldots\ldots\ldots$	4
Venere	$= 4 + 2^0 \times 3 =$	7
la Terra	$= 4 + 2^1 \times 3 =$	10
Marte	$= 4 + 2^2 \times 3 =$	16
Vesta, Giunone / *Pallade, Cerere*	$4 + 2^3 \times 3 =$	28 Questi mancavano al tempo di Keplero.
Giove	$= 4 + 2^4 \times 3 =$	52
Saturno	$= 4 + 2^5 \times 3 =$	100
Urano	$= 4 + 2^6 \times 3 =$	196

Se adunque vi fosse un altro pianeta al di là di Urano, dovrebb'essere alla distanza di $4 + 2^7 \times 3 = 388$. E quando si voglia a modo d'esempio la distanza di Urano dal sole, facendo la distanza della terra = 34 000 000 leghe, si avrà 10 : 196 :: 34 000 000 : x = 666 400 000 leghe.

25. Così esposte le circostanze generali del sistema planetario, ne fa mestieri dire alcuna cosa di ciascun pianeta in particolare; e pensiamo, ad onta della brevità che ci abbiamo proposto, fermarci alquanto di più allorchè saremo a parlare della terra e del suo satellite.

Le quantità che indicheremo per dinotare il diametro, il volume, i movimenti ec. di ciascun pianeta sono relative alle unità seguenti, delle quali parlando della terra, si darà quella ragione che, dagli stretti limiti al nostro scopo in ciò necessarî, ne verrà permessa.

1.° Pel *diametro*, quello della terra = 2870 leghe;

2.° Pel *volume*, quello della terra = 12 408 835 616 leghe cubiche;

3.° Per la *massa*, quella che si è per la terra calcolata; cioè 5 446 785 714 285 714 285 710 000 moltiplicato per la quantità di materia contenuta in un decimetro cubico di acqua pura;

4.° per la *rotazione*, 24 ore di tempo medio;

5.° per la *distanza media* dal sole, la distanza media che vi ha la terra, 34 000 000 di leghe;

6.° per l'*eccentricità relativa*, si prende per unità la distanza media che ha dal sole il pianeta di cui si parla: essa ci facilita la comparazione degli allungamenti delle orbite.

7.° per l'*eccentricità assoluta*, l'unità è 34 000 000 di leghe, perocchè si rappresenta con essa certo numero di leghe, che, aggiunto o tolto alla distanza media del pianeta dal sole, dà la distanza afelia o perielia del medesimo.

8.° per la *rivoluzione siderea*, l'unità è l'anno sidereo $=365^g 6^h 9^m 12$, $=365^g,256$.

Tali quantità prese in parte da quelle assegnate dal *Bureau des longitudes* di Parigi possono offrire de' risultamenti inferiori in cifra a quelli che dedurremo da' ragionamenti che siamo per fare; ma la differenza sarà sempre insignificante.

LEZIONE III.

Del sole e de' pianeti inferiori.

26. *Forma e rotazione del sole.* Allorchè vediamo il sole a traverso della nebbia o di qualche vetro colorato ne sembra un cerchio, adunque esso è rotondo almeno in un senso. In oltre, col mezzo de' grandi telescopî vediamo sul suo disco delle macchie, le quali appariscono dal lembo sinistro e ne spariscono dal destro; sicchè esso gira sopra un asse da occidente in oriente, e mentre gira è sempre di forma circolare al nostro sguardo; ma solo un globo è rotondo in tutti i sensi, adunque il corpo del sole è sferico. E poichè il centro di una macchia impiega giorni $12\frac{1}{2}$ a traversare l'intero disco, dobbiamo conchiudere che la rotazione del sole è uguale a 25 giorni di quelli che si contano sulla terra.

27. *Inclinazione dell' asse.* L'osservazione dell'andamento delle macchie ha fatto conoscere che l'asse AB (*fig. 6.*) del sole fa costan-

temente un angolo di 82° 40′ col piano CD che contiene il suo centro e quello della terra, e ch'è perpendicolare al piano che passa per la congiungente de' centri e per l'asse del sole. Sia EF il cammino di una macchia, l'angolo ASE sarà di 90°, poichè il movimento di rotazione di un globo fa percorrere a tutti i punti della sua superficie circonferenze di cerchi sempre perpendicolari all'asse. Or l'angolo ASC = ASE — ESC; ma ESC si è trovato di 7° 20′, dunque ASC = 90° — 7° 20′ = 82° 40′.

28. *Diametro.* Per parlar del diametro del sole è d'uopo anticipare una conoscenza di cui a suo luogo parleremo, cioè che la terra n'è distante circa 34 000 000 di leghe. Or descrivendo un cerchio con questo raggio, e facendo centro il centro della terra, avremo che il sole sarà veduto da noi sulla circonferenza di un cerchio che ha il diametro di 68 milioni di leghe; vale a dire su di una circonferenza lunga 213 628 318 leghe. Se dunque il diametro del sole è veduto dalla terra sotto un angolo di 32′ 3″,3 in quantità media o sia 1923″,3, ed esprimiamo la circonferenza del cerchio ne' suoi 1 296 000″, per trovare la lunghezza del diametro del sole espressa in leghe, basterà stabilire la seguente analogia 1 296 000 : 1923,3 :: 213 628 318 : x; dappoichè x esprimerà l'arco che il sole occupa in questa gran periferia; ma essendo tale arco di mezzo grado circa, possiamo considerarlo come eguale alla corda, adunque x che risulta eguale a 317000 leghe circa, sarà la lunghezza del diametro del sole.

29. *Volume e velocità della rotazione.* Essendo il diametro del sole di circa 317000 leghe, deducesi facilmente essere il suo volume di circa 16 679 284 806 800 000 leghe cubiche; ed ogni punto del suo cerchio massimo perpendicolare all'asse percorrerà 995887 leghe in 25 giorni, o sia 1660 leghe in un'ora.

30. *Massa.* Numerose esperienze han dimostrato che se nel vuoto lasciamo cadere un oggetto materiale dall'altezza di metri 4,9, esso in 1″ attingerà la superficie della terra; ma le attrazioni di un medesimo corpo, come sarà detto quando saremo a parlare della terra, agiscono

nella ragione inversa de' quadrati delle distanze, dunque lo stesso oggetto situato alla distanza di 34 000 000 di leghe sarebbe attratto dalla terra in 1″ per la quantità espressa dal quarto termine dell'analogia $(34\ 000\ 000)^2 : (4,9)^2 :: 4^m,9 : x$. Or per non tradire la brevità, e dare insieme una plausibile idea del calcolo, ci si permetta lo sproposito di servirci nelle presenti valutazioni, di logaritmi a sette cifre decimali, e dire $\log x = \overline{13}.0076305$. Le attrazioni esercitate da un corpo sopra due altri di diversa grandezza e posti alla medesima distanza, sono proporzionali alle masse; quindi moltiplicando il valore di x per la massa terrestre ch'è nota (40), si avrà l'espressione dell'attrazione che eserciterebbe la terra sovra *un globo che le fosse uguale*, e ne fosse lungi quanto il sole ($\overline{13}.0076305 + 24.7361403 = 11.7437708$). Inoltre conoscendo la forma e la lunghezza dell'orbita della terra, come a suo luogo si dirà, si è determinata la sua deviazione in 1″, la quale rappresenta l'attrazione del sole sulla terra, ed ha per logaritmo $\overline{7}.8285965$ (47). Questa quantità moltiplicata per l'azione attrattiva della terra sovra il *globo eguale*, darà che la massa del sole è 373566 volte maggiore di quella della terra; cioè $\overline{7}.8285965 + 11.7437708 = 5.5723673$: vale a dire che il logaritmo prossimo della massa del sole sarà $5.5723673 + 24.7361403 = 30.3085076$. Del qual numero è sottinteso (25) le unità rappresentare la quantità di materia contenuta in un decimetro cubico di acqua pura. Per tal rapporto delle masse del sole e della terra, eseguito il calcolo con precisione, e posta similmente quella della terra = 1, Lalande trova 365412; Piazzi, 329630; ma noi qui ci atterremo secondo il solito all'indicazione del *Bureau des longitudes*.

Diametro	109,93
Volume	1 328 460
Massa.	354 936
Rotazione	25ᵍ,50

Di Mercurio.

31. Sembra Mercurio una stella di seconda grandezza, ed a motivo delle sue fasi mostrasi allo sguardo con luce spesso maggiore, spesso minore. Trovandosi questo pianeta inferiore sempre a minor distanza dal sole di quella che vi ha la terra, non potrà questa mai trovarsi tra

Mercurio ed il sole; o ciò ch'è lo stesso, Mercurio non potrà mai trovarsi in opposizione col sole rispetto alla terra; ma in vece vi avrà due congiunzioni l'una detta *inferiore* quando, essendo tutti e tre i loro centri in linea retta, Mercurio è interposto tra la terra ed il sole; e l'altra *superiore* quando l'astro interposto è il sole. Le sue elongazioni variano da 16° 12′ fino a 28° 48′, ed il suo diametro, secondo le diverse distanze, varia da 5 a 12″; in conseguenza assunto in quantità media è 8″ 5.

Diametro	0,39
Volume	0,1
Massa	0,1752
Rotazione	1,0000
Distanza media	0,387
Eccentricità relativa	0,2055
Eccentricità assoluta	0,07955
Rivoluzione siderea	0,24
Inclinazione dell'orbita su quella della terra	7° 0′ 0″

Di Venere.

32. Il pianeta più bello che veggasi nel cielo è Venere, esso come Mercurio è ancora un pianeta *inferiore:* le sue elongazioni variano da 45° a 47° 12′, la digressione media è dunque di 46° 6′; le fasi e la diversità della distanza a cui trovasi dalla terra ne fanno variare il diametro da 9″, 6 fino ad 1′ 1″, 2; ma il valore ch'esso ha, visto dalla terra, quando la distanza del pianeta è la media dal sole, si è di 16″,9. I passaggi di Venere sul disco solare offrono il miglior mezzo per valutare la distanza dalla terra al sole.

Diametro	0,97
Volume	0,9
Massa	0,8833
Distanza media	0,723
Eccentricità relativa	0,0069
Eccentricità assoluta	0,00498
Rivoluzione siderea	0,61
Rotazione	0,973
Inclinazione dell'orbita su quella della terra	3° 23′ 35″

LEZIONE IV.

Della Terra.

33. *Forma.* Il primo sentimento che l'uomo prova contemplando e ciò che su la terra lo circonda ed il cielo, si è quello di stimarsi circolarmente al centro di una vasta estensione frastagliata da valli e monti, e sfericamente al centro di tutti i movimenti degli astri di cui è spettatore. Ma ben tosto questa illusione svanisce, considerando 1.° ricevere i raggi del sole le vette de' monti in pria, e poi, scendendo a gradi, la pianura; 2.° apparire in lontananza sul mare le vele superiori di un vascello prima che le inferiori ed il bordo; 3.° distinguersi dall'Affrica (p. e.) molte stelle che non veggonsi stando in Norvegia: fenomeni tutti che sarebbe impossibile spiegare nell'ipotesi della terra piana.

34. Avvegnachè la spiega testè data possa esser tenuta come soddisfacente, pure è d'uopo addurne qualche dimostrazione geometrica. Sia TT' (*fig.* 7.) la terra piana, e da due punti presi a gran distanza fra loro sulla superficie del mare, A e B, si menino simultaneamente le due visuali AS e BS ad una medesima stella fissa S: queste saranno parallele, e parallele dovrebbero essere le mA ed nB, se rappresentano le perpendicolari alla superficie delle acque tranquille. Laonde gli angoli mAS ed nBS dovrebbero riuscire sempre eguali tra loro; ma nel fatto l'esperienza dimostra esser dessi non solo sempre discordanti ma ancora esser minore quello dal canto della stella, e nella specie nBS (*fig.* 8.) minore di mAS, e ciò in tutti i sensi possibili; adunque la terra è un solido le cui perpendicolari alla superficie convergono verso il centro; quindi essa è di superficie curva in tutti i versi, e forse una sfera. In fatti accurate osservazioni e calcoli di somma precisione han confermato esser la terra uno sferoide, le cui dimensioni sono:

asse maggiore . . . . 2877 leghe.
asse minore . . . . 2864 leghe.
diametro medio . . . . 2870 leghe.
un grado dell'ellisse generatrice 57030 tese.

35. *Scabrosità.* Nè sulla superficie della terra è da tenersi conto della scabrosità che vi formano i monti, giacchè il più alto di essi finora conosciuto, il *Thamalari* nella catena dell'Hymalaya al Tibet non si eleva che a lega 1,76; ed essendo il diametro medio della terra di 2870 leghe, l'altezza del Thamalari sarà espressa da $\frac{1}{1630}$ del diametro della terra: o sia dal rapporto di 0,1 : 163; vale a dire l'ineguaglianza che tal monte rappresenta sul globo terrestre è come quella di un decimo di pollice di altezza sopra una sfera di 163 pollici di diametro.

36. *Concorso delle verticali.* Essendo la terra uno sferoide, è chiaro che le perpendicolari alla sua superficie, benchè tutte concorrenti verso il centro, non possono quivi precisamente incontrarsi; ma poichè è lieve la differenza tra l'asse maggiore ed il minore, esse s'incontreranno a tanta poca distanza dalla intersecazione de' due assi, che in pochissimi casi riescirà erronea tal supposizione.

37. *Volume.* Si faccia un cilindro che abbia per base un cerchio del diametro quanto l'asse maggiore dello sferoide, e per altezza l'asse minore dello stesso, i $\frac{2}{3}$ del volume di tal cilindro, daranno per volume della terra, leghe cubiche 12 408 835 616.

38. *Rotazione.* Dopo la convinzione di aver la terra la stessa forma globulare di tutti gli altri pianeti; e che il sole ed i pianeti tutti girano intorno ad un proprio asse, n'è permesso supporre per analogia, che ancora la terra giri intorno ad un asse. Questa semplicissima ipotesi ne libera dalla sgomentevole idea d'immaginare come la luna, i pianeti, il sole e tutte le stelle fisse, tutti ad immense e diverse distanze, compissero poi insieme una intera rivoluzione intorno alla terra nello spazio di 24 ore; e nello stesso tempo avessero la luna, i pianeti, ed il sole un altro movimento proprio in senso opposto al primo. In fatti, ammesso che la terra T (*fig.* 9.) giri intorno di un asse perpendicolare al cerchio ABCD, avremo che il sole S non cesserà mai d'illuminarne quasi la metà della circonferenza, e quindi se la rotazione si esegue nel senso ABCD, nella posizione della figura, pel punto C il sole è al tramonto; pel punto B, a mezzodì; e pel punto A,

al sorgere; mentre per D sarà mezzanotte. E se la rotazione si compie in 24 ore, in ciascun punto della circonferenza si osserveranno tutti gli stessi fenomeni nella durata di un giorno. Or se noi supponiamo essere il cerchio ABCD, proiettato come BD (*fig. 10.*), e che la rotazione si esegua intorno dell'asse P*p*, avremo che tutti i punti della circonferenza BD rimarranno più tempo nell'emisfero illuminato che nell'altro, e quindi saranno i giorni maggiori delle notti; mentre per tutti i punti di B'D' sarà inverso il fenomeno. Ecco dunque che la rotazione intorno all'asse spiega con tutta facilità la distinzione del giorno e della notte in 24 ore; ed il non esser retto l'angolo STP fatto dall'asse, e dalla congiungente de' centri del sole e della terra, basta per ora a far comprendere con eguale semplicità l'ineguaglianza de' giorni.

39. ***Forza centrifuga.*** Tal movimento di rotazione però, deve produrre di necessità nel globo terrestre una forza per la quale tutte le parti ad esso non aderenti sarebbero spinte con gran violenza, ognuna nella direzione della tangente il cerchio di rotazione, descritto dal punto della terra ove ciascuna di esse si trova, la quale dicesi forza *centrifuga* o sia tendente a *fuggire il centro;* e sfuggirebbero, se trattenute non vi fossero dalla forza di *attrazione* per la quale tendono sempre al centro, e di cui or ora parleremo. La forza centrifuga intanto non può essere eguale da per tutto: imperciocchè se AP*p* (*fig. 11.*) rappresenti un cerchio che passi pe' poli della rotazione, e sia B un luogo qualunque, per esempio Napoli, ed A un luogo ad egual distanza da' due poli come Quito nel Perù; avremo che nella rotazione di 24 ore, la circonferenza del cerchio descritto da A, sta alla circonferenza descritta da B, come AC a BD, o sia come R : cos AB. E posto il raggio della terra AC = 1, e l'arco AB = 40° 50', distanza di Napoli dal cerchio massimo della rotazione, si otterrà BD = 1086 leghe, e la circonferenza del cerchio da Napoli descritto in 24 ore, eguale a leghe 6822, e quindi in ogni ora, 284 leghe; mentre per Quito la velocità è di 9039 in 24 ore, e di 377 in un'ora. Inoltre, se nel punto A la forza centrifuga agisce secondo CA, quella di attrazione si esercita secondo AC, vale a dire, in senso perfettamente opposto; mentre in B la forza centrifuga è secondo DB, e la centripeta secondo BC; finchè

al polo, DB diviene zero, e la forza di attrazione si eserciterà con tutta la sua energia secondo PC. Per questa ragione, qualunque sia l'ipotesi che voglia seguirsi la nettuniana o la plutoniana, per questa ragione il nostro globo trovasi schiacciato a' poli; ed ogni sezione in esso fatta per l'asse è un ellissi, la cui eccentricità essendo appena di $\frac{1}{307}$ circa, può trascurarsi, e riguardar la sezione come cerchio. E per questa ragione ancora un medesimo oggetto avrà più peso specifico al polo che all'equatore, senza che d'altronde possa esserne alterato il peso relativo; imperciocchè la variazione è comune e proporzionale.

40. *Massa*. Se poi vogliamo formarci un'idea del peso che avrebbe l'intero globo terrestre, quando si trovasse alla medesima condizione, nella quale son tutti i corpi su di esso esistenti, ammettiamo il decimetro cubico di acqua pura per unità di massa media della terra: in tal caso sarà il peso nella ragion de' volumi. Adunque riducendo leghe cubiche 12 408 835 616 a decimetri cubici, e sapendo che ognuno di questi ha per peso medio 5 kilogrammi, si avrà la *massa* della terra espressa dalle venticinque cifre seguenti 5 446 785 714 285 714 285 710 000 kilogrammi. Cioè, ricorrendo a' soliti logaritmi,

log prossimo 12 408 835 616	10.0937311
log lato del cubo	3.3645770
log 4444,4 metri contenuti in una lega	3.6478131
log prossimo, metri lineari del lato del cubo	7.0123901
log 10	1.0000000
log prossimo, decimetri lineari	8.0123901
	3
log prossimo, decimetri cubici	24.0371703
log 5 kilogrammi, peso del decimetro cubico di acqua pura	0.6989700
log prossimo, peso della terra in kilogrammi	24.7361403

41. *Attrazione*. La forza per la quale i corpi tutti, e le loro parti, tendono a ravvicinarsi gli uni agli altri, dicesi *attrazione*: essa è proprietà inerente alla materia, come le dimensioni, la forma, l'inerzia, ec. Quando trattasi di molecole messe a piccolissima distanza e quasi in contatto, prende ancora il nome di *forza di affinità*, o

forza adesiva; se trattasi della proprietà del globo terrestre per la quale attira a se i corpi tutti che sono alla sua superficie, dicesi *gravità* del corpo verso il suo centro; ed essa è di tale intensità, e tanto maggiore della centrifuga, che questa, quantunque immensa, non è mai e in nessun modo da noi avvertita. Anzi il nostro globo abitato intorno intorno da per tutto, altra impressione non produce all'osservatore su di ciò, che di esser egli fermamente appoggiato sulla terra, e di avere ad infinita distanza sul capo un' apparente volta cilestra. Finalmente l'attrazione, quando vuolsi indicare la proprietà di cui son dotati il sole e tutti i pianeti in generale di attrarsi l'un l'altro, suol prendere il nome di *attrazione planetaria, forza centripeta,* o *gravitazione universale.* Ammessa ch' ebbe questa antica e sublime idea, l'immortale Newton trasse dalle tre leggi di Keplero le seguenti conclusioni, confermate dal calcolo:

42. Dalla 1.ª i raggi vettori descrivono aie proporzionali ai tempi, dedusse che *la forza da cui sono i pianeti sollecitati è diretta verso il centro del sole.*

43. Dalla 2.ª le orbite sono ellissi delle quali il sole occupa nn fuoco comune, dedusse che *la forza di attrazione negli astri è in ragione inversa de' quadrati delle distanze.*

44. Dalla 3.ª i quadrati de' tempi delle rivoluzioni sono tra loro come i cubi de' grandi assi delle rispettive orbite, dedusse che *la forza è proporzionale alla massa.*

45. E da ciò conchiuse essere il sole centro di una potenza attrattiva, per la quale tutti i pianeti gli girano intorno. E per una potenza di egual natura, di cni ciascun pianeta è dotato in ragion della massa, i satelliti girano intorno a' rispettivi pianeti; senza che niuno di questi o di quelli possa allontanarsi dalla propria orbita.

46. *Rivoluzione.* Se però per tale supposizione è manifesto che non possono i pianeti allontanarsi dal centro della potenza che gli attrae,

sembra in vece che dovrebbero cadervi. Quindi lo stesso Newton pensò, che siano dotati i pianeti di una forza impulsiva per la quale non cesserebbero mai di seguire una linea retta, se la forza di attrazione agendo sempre perpendicolarmente alla prima, non gli attirasse di continuo, obbligandoli così a descrivere una curva.

Se un corpo T (*fig. 12*) ha una forza impulsiva per la quale è spinto da A in B equabilmente in un mezzo non resistente; e giunto in T venga attratto secondo TS perpendicolare ad AB, descriverà una curva. Questa sarà una circonferenza di cerchio se la forza impulsiva è tale che farebbe percorrere al corpo T tutta la TC posta eguale a cos 30°, considerando $TS = r$, nella stessa durata di tempo che esso, lasciato libero, impiegherebbe nella caduta a percorrere la TE metà di TS distanza del punto T da S, sede della potenza attrattiva; imperciocchè da questa condizione ricavasi facilmente $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ per equazione della curva. Or se facciamo T la terra ed S il sole, e sappiamo esser la terra a diverse epoche dell'anno a differenti distanze dal sole, non possiamo ammettere esser questo il rapporto tra la forza di gravitazione e la forza impulsiva, stantechè allora la terra descrivendo un cerchio dovrebbe trovarsi sempre alla medesima distanza, la qual cosa è contra il fatto; adunque esser deve la forza di attrazione, alquanto maggiore, onde avere $\frac{TE}{TC} > \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}$, preso sempre la TS per raggio.

Si descriva adunque un cerchio col raggio TS (*fig. 13*) massima distanza della terra dal sole, e prendiamo TE metà di TS, elevando a questo raggio la perpendicolare ED; poichè deve essere $\frac{TE}{TC} > \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}$, bisognerà che TC sia minore di cos 30°; e posto che lo sia della quantità necessaria $yC = Dx$, sarà il punto x quello per lo quale passerà la curva TxGH, dalla terra descritta in un anno. Ed essendo i raggi vettori successivamente minori da T in x e in G, dove SG sarà il minimo, conchiuderemo, 1.° che la velocità della terra andrà continuamente crescendo da T, x, G nel qual punto sarà la massima (43); 2.° che gli archi ellittici descritti in tempi eguali saranno sempre maggiori da T, x, G (42).

Avendo così la terra acquistata in G una velocità maggiore di

quella che aveva in T, pare che dovesse quivi esser meglio atta a fuggir per la tangente; ma se la sua velocità è maggiore, maggiore è pure la potenza attrattiva del sole, essendo SG < ST; in guisachè la terra continuerà a percorrere la curva GHT, passando in ordine inverso per tutte le medesime circostanze per le quali è giunta da T in x, in G: finchè si troverà nuovamente in T, nelle condizioni nelle quali l'abbiamo supposta la prima volta partire.

47. *Distanza dal sole.* Da quanto abbiamo esposto nel paragrafo antecedente è manifesto doverci primordialmente assicurare della distanza che ha la terra dal sole. Sia AB (*fig. 14*) una gran distanza presa sulla terra e da' punti A e B si menino simultaneamente le due visuali AS e BS, con istrumenti atti a dar la misura degli angoli SAB ed SBA, il supplemento alla loro somma darà l'angolo ASB; e siccome il triangolo può considerarsi per isoscele quando pure non lo sia, essendo le AS ed SB quasi parallele, così con la sua metà, e col lato Ax noto, perchè metà di AB, si determinerà Sx alla quale aggiunti i raggi della terra e del sole si otterrà la distanza de' loro centri. Ponghiamo Ax = 1435 leghe, metà del diametro medio terrestre, e l'angolo ASx = 0° 0′ 8″,8, avremo Sx = Ax cot S; o sia, giovandoci de' logaritmi, 3.1568519 + 14.3699425 — 10 = 7.5267944, e quindi Sx = 33 635 231, e la distanza dalla terra al sole 33 953 666 leghe. E volendo verificare tal misura nella favorevole circostanza del passaggio di Venere sul disco solare, i due osservatori C e D (*fig. 15.*) hanno entrambi determinati gl'istanti dell'immersione e della emersione v e v' per C, e v' v per D con qual mezzo han potuto determinare l'arco vv', e quindi l'angolo S dalla esattezza del quale tutto il calcolo dipende. Molti in fine sono stati i metodi adoperati all'oggetto, ma trattandosi qui di dar semplicemente un'idea della cosa, abbiamo solo curata l'economia delle parole. Intanto, osservazioni esatte debitamente eseguite e calcolate hanno dato per distanza media i limiti da 34 918 919 a 33 081 081 leghe, la cui semisomma essendo 34 000 555 possiamo valerci del numero rotondo 34 000 000. Da ciò siegue che diremo esser l'asse maggiore dell'orbita 68 milioni di leghe, nella quale estensione 34 573 008 rappresentano la distanza *afelia*, cioè la massima;

e 33 426 992 la distanza *perielia*, cioè la minima; quindi eccentricità dell'orbita 573 008 leghe, le quali, ponendo 34 000 000 = 1, sono rappresentate dalla frazione 0,01685318. Laonde con questi elementi sarà facile costruire la curva, e convincersi che la eccentricità in tale ellisse è così lieve, da poter esser questa considerata come cerchio in tutte le circostanze nelle quali non richiedesi somma esattezza e precisione.

Costruita così la curva, e giunti alla convinzione esser dessa quasi simile al cerchio, ne sarà facile valutare la quantità 1T o sia Fh (*Fig. 13*), la quale rappresenta la deviazione che subisce la terra per virtù dell'attrazione del sole nel primo 1'' di tempo; nel quale primo istante, in tutti i punti dell'orbita, la forza impulsiva si troverà sempre perpendicolare alla forza di attrazione, e quindi sarà questa rappresentata dalla deviazione $Fh = \frac{(TF)^2}{TG}$. Cioè:

log prossimo 213 628 318, circonferenza in leghe 8.3296622
log prossimo 31 558 152'' della rivoluzione siderea. . . . 7.4991095
log 6,7695 leghe percorse in 1'' 0.8305527
2
log quadrato della corda, o sia log (TF)^2. . . . . 1.6611054
log 68 000 000 leghe del grande asse, o sia TG 7.8325089
log 0,000 000 6739 deviazione in 1'' . . . . $\bar{7}$.8285965

48. *Inclinazione dell'asse*. Sicchè la terra in un anno percorre una curva di 213 628 318 leghe, e si aggira intorno al proprio asse con la velocità di 377 leghe all'ora, adunque la forza impulsiva non le fu comunicata nella direzione del centro di essa, altrimenti si sarebbe verificato solo il movimento di traslazione; nè tagenzialmente, perocchè si sarebbe avuto in tal caso solo quello della rotazione, dovette in conseguenza seguire in direzione diversa da quella delle due estremità di un raggio. Se un globo EPDp (*fig. 16*) è spinto per una impulsione secondo ABD, esso procederà secondo BCx, e roterà nel senso BD; in guisachè l'asse della rotazione sarà Pp perpendicolare alla direzione dell'urto, ma il cammino sarà necessariamente nella direzione opposta a quella del raggio menato al punto dell'impulso, essendo nel centro il centro di gravità di una sfera. Or la BD rappresenti la proie-

zione di un cerchio perpendicolare a Pp, e sia EQ un cerchio massimo parallelo a BD. Se l'angolo CBD fosse di 23° 28′, della stessa quantità sarebbe xCQ; e PCx di 66° 32′.

E queste deduzioni sarebbero esatte, quando la terra fosse perfettamente sferica, e quando non dovesse ubbidire che alla sola forza d'impulsione. Per la qual cosa se l'angolo PCx è di 66° 32′ dobbiamo conchiudere che la forza d'impulsione che l'anima, le fu comunicata alquanto diversamente da ciò che abbiamo supposto: indagine al di là del nostro scopo, e del nostro bisogno. Avvertiremo, intanto, che l'asse Pp della rotazione dicesi *asse della terra;* e i suoi estremi P e p, *poli terrestri.*

49. *Parallelismo dell' asse.* Quantunque la terra nel periodo della sua rivoluzione trovisi successivamente in tutti i punti della sua orbita, pur vediamo sempre lo stesso polo terrestre diretto verso lo stesso punto del cielo; dobbiamo quindi conchiudere che, durante la rivoluzione, l'asse della terra serbasi costantemente parallelo a se stesso, la qual proprietà dicesi *parallellismo dell' asse.*

50. Questo parallellismo dell' asse però non si avvera senza subire delle picciole oscillazioni dipendenti dalle attrazioni combinate della luna suo satellite e del sole. Nulladimeno per pochi giorni di seguito la posizione del polo può riguardarsi come fissa, perchè il suo movimento è continuo ma lentissimo, e di più non uniforme; e le osservazioni ed il calcolo han fatto conoscere comporsi di un movimento principale uniforme o quasi tale, e di un altro movimento più piccolo soggetto ad oscillazioni periodiche. Il primo di tali movimenti dicesi *precessione;* il secondo, *nutazione.*

51. *Precessione degli equinozî.* In virtù delle moltiplici osservazioni che in tutte le epoche sonosi dirette a determinare la posizione relativa della terra e del sole rispetto alle stelle fisse, si è notato che quando il raggio vettore passa lungo l'intersecazione dell'orbita della terra e del cerchio massimo della sua rotazione, cioè, ne' *giorni degli equinozî,* come sarà detto a suo luogo, non rilevasi il sole sempre in direzione della medesima stella fissa; ma che in ogni anno ciò avviene alla

distanza di 5o″,1 di arco dell'orbita contato in ordine retrogrado, rispetto al cammino della terra, e relativamente al punto in cui avvenne lo stesso fenomeno l'anno precedente. Sia BcA (*fig. 17*) l'orbita della terra e PE*p*Q la terra, EQ la proiezione del cerchio massimo della rotazione, P*p* l'asse. Se in un anno è avvenuto l'equinozio allorchè la terra trovavasi nel punto *c* della sua orbita, e l'anno seguente avviene in *c′*, prima che sia interamente compiuta l'orbita, deve conchiudersi che il cerchio QE abbia acquistata la posizione *en*, o sia Q′E′ ad essa parallela; poichè il raggio vettore è giunto allo stesso punto E o E′ d'intersecazione, prima di giungere la terra al punto in cui era l'anno innanti rispetto al sole S ed alla stella ♈; e ciò a motivo che l'asse P*p* non ha conservato perfettamente il suo parallellismo durante la rivoluzione della terra, ma ha declinato di 5o″,1 in senso opposto a quello della traslazione, facendo $Pcx = Ecn = 5o'',1$. I due angoli xcS e $P'c'S$ hanno i due lati xc e $P'c'$ paralleli, come rappresentanti la stessa posizione dell'asse, ed i lati cS e $c'S$ convergenti in S, adunque $xcS - P'c'S = cSc'$. D'altronde $xcS = 90 + 5o'',1$ e $P'c'S = 90°$, dunque $cSc' = 5o'',1$. L'arco $c'c$ è quindi quasi costantemente di tal quantità, o ciò ch'è lo stesso, l'arco ♈*m* è di 5o″,1, per chi amasse meglio il linguaggio tolemaico.

52. *Grande anno, o anno delle stelle fisse*. Questo movimento dell'asse intanto adducendo ogni anno un'anticipazione del fenomeno per 5o″,1, a capo di 25868 anni, sarà questo avvenuto successivamente in tutti i punti dell'orbita; vale a dire, ne parrà che le stelle fisse in detta durata di tempo abbiano compiuta una rivoluzione.

53. *Nutazione*. L'altro movimento dell'asse di cui abbiamo fatto menzione (50), cioè quello della nutazione, è un movimento piccolo e lento, per lo quale, se non vi fosse simultaneamente l'altro della precessione, il polo descriverebbe una piccola ellisse avente 18″,5 per asse maggiore, e 13″,74 per asse minore, e parallela all'orbita della terra, nel periodo di 19 anni. Ma siccome questi due movimenti esistono insieme, così nell'atto che il polo descrive la piccola ellisse indicata, venendo trasportato dal movimento circolare della precessione, non descriverà esso

nè una ellisse nè un cerchio, ma un anello continuamente ondulato, come ABCP (*fig. 18*) che bisogna suporre ad immensa distanza, e parallelo all'orbita FGH. Il punto E rappresenta l'estremo di una retta elevata dal centro del sole perpendicolarmente al piano FGH, la quale più tardi chiameremo *asse dell'eclittica*, ed il punto P rappresenta il polo nel prolungamento immaginario dell'asse terrestre. Or se supponiamo una sfera di cui FGH sia un cerchio massimo, e ponghiamo EP di 23° 28′, il punto P impiegherà a descrivere PCBA 25868 anni, mentre per la nutazione il cui periodo è 19 anni si dovrebbe compiere una ellisse ogni 19×50″,1 della circonferenza PCBA, la quale essendo quella di un cerchio minore, di appena 23° 28′ distante dal polo, corrisponderà a 6′ 20″, vista dal centro della terra.

54. *Aberrazione*. I movimenti della terra nella sua orbita, ed intorno al proprio asse cagionano ancora un altro fenomeno detto *aberrazione*. Quando saremo a parlare de' satelliti di Giove faremo conoscere che la luce impiega per traversare il grande asse dell'orbita terrestre 16′ 26″,4, e però onde percorrere il raggio medio di essa, 8′ 13″,2, ossia 493″,2; ma in questo tempo la terra si avanza nell'orbita per 20″,253, dunque se supponghiamo da un astro S (*fig. 19*) emanare un raggio di luce verso la terra nell'istante che questa ha il centro in A, tal raggio vi giungerà quando il centro della terra sarà passato in C; e se facciamo SA=493″,2 sarà AC=20″,253; quindi l'astro S sarà sempre veduto, in tal caso, secondo la risultante AB, o sia 20″,253 più innanti del luogo ove realmente si trova: cioè come si trovasse effettivamente in B, e quest'angolo di deviazione SAB dicesi aberrazione. Da ciò è manifesto che quando SA è perpendicolare ad AC sàrà la massima; quando SA ed AC concorrono sarà zero, e nelle altre posizioni sarà la quantità dell'aberrazione compresa fra questi limiti, e dall'uno o dall'altra parte della perpendicolare rispetto al movimento progressivo della traslazione della terra. Se l'astro S fosse il sole per lo quale abbiamo veduto la massima aberrazione esser 20″,253, aggiungeremo, che poichè per la sua posizione quasi centrale, la sua luce è sempre perpendicolare al cammino che segue la terra, così l'aberrazione ad esso relativa è sempre 20″,253. Di modo che bramando conoscere il

vero luogo in cui trovasi la terra nella sua orbita, bisogna costantemente aggiungere non già 180° ma bensì 180° 0′ 20″,253 a quello che le effemeridi assegnano pel sole in un dato istante, luogo che fra poco chiameremo *longitudine* della terra o del sole rispettivamente. L'aberrazione rispetto alle stelle fisse si ha, calcolata sullo stesso principio, e secondo la loro diversa posizione rispetto all'andamento della terra nella propria orbita, si ha calcolata in tavole. Del resto questa è correzione sempre di poca importanza, dappoichè, fatto il lato SA = 10313 AC, si ha egualmente 20″ di correzione, e seguendo una stella in tutte le sue deviazioni apparenti, si trova alla fine dell'anno esser giusta questa correzione, la quale riducesi appena 1″,3 di tempo, come s'intenderà in appresso.

La quantità dipendente dalla rotazione diurna è stata quì trascurata; per la ragione che, essendo la violenza di tal movimento appena la 65.ª parte di quella di traslazione, essa non v'influisce che appena per la quantità + 0″,3 in grado, circa.

55. Per le dimensioni ed ogni altro elemento di calcolo riguardante la terra si vedano al §. 25, ove sonosi anticipatamente indicate, come quelle che servir doveano di unità per tuttociò che riguarda gli altri pianeti. Solo ne rimane ad aggiungere esser la rotazione di essa = 0,997 dell'unità ivi assunta, e di cui in seguito sarà dato ragione.

LEZIONE V.

De' pianeti superiori, e delle comete.

Di Marte.

56. Marte apparisce come una stella rossastra di luce piuttosto fioca: presenta delle fasi molto distinte, ha delle macchie, ed è schiacciato ai poli della rotazione per $\frac{1}{16}$ del suo diametro. Esso come tutti gli altri pianeti superiori, avendo sempre maggior distanza dal sole di quella che vi ha la terra, potrà esser veduto a tutte le possibili distanze angolari da quello; e quindi ancora con esso in opposizione rispetto alla

terra. Il suo diametro si presenta sotto angoli da 3'',6 fino a 18'',28, e quando trovasi alla distanza media dalla terra 6'',29.

Diametro	0,56
Volume	0,2
Massa	0,1324
Rotazione	1,027
Distanza media ☉	1,524
Eccentricità relativa	0,0931
Eccentricità assoluta	0,14184
Rivoluzione siderea	1,88
Inclinazione dell'asse	59°. 42'
Inclin. dell'orbita a quella della terra	1°. 51' 0''

Di Vesta, Giunone, Cerere e Pallade.

57. Vesta, Giunone, Cerere e Pallade non sono affatto visibili ad occhio nudo per la loro picciolezza, e quindi vengon detti ***asteroidi***. Prima del corrente secolo non erano conosciuti, nè di tutti sono note le medesime particolarità che per gli altri pianeti.

	Vesta	*Giunone*	*Cerere*	*Pallade*
Diametro			0,0233	0,0115
Distanza media ☉	2,373	2,667	2,767	2.768
Eccentricità relativa			0,081	
Eccentricità assoluta			0,22412	
Rivoluzione siderea	3,58	4,36	4,61	4,61
Inclinazione dell'orbita			10°24'55''	

Di Giove.

58. Giove si presenta allo sguardo siccome stella lucentissima, che talvolta ne avanza in bellezza lo stesso pianeta Venere. Il suo disco presenta certe strisce nere sensibilmente parallele; e lo schiacciamento nel senso dell'asse è circa $\frac{1}{14}$ di esso. Vedesi il suo diametro sotto gli an-

goli da 3o″ fino a 45″,88; e quando è alla media distanza da noi 36″,74. Esso, come già si è detto, ha quattro satelliti de' quali faremo cenno nella lezione seguente, insieme a quelli di Saturno ed Urano.

Diametro	11 ,56
Volume	1470 ,2
Massa	337 ,8734
Rotazione	0 ,414
Distanza media ☉	5 ,203
Eccentricità relativa	0 ,0481
Eccentricità assoluta	0 ,25013
Rivoluzione siderea	11 ,87
Inclinazione dell'asse	86°. 48′
Inclin. dell'orbita a quella della terra .	1°. 19′ 2″

Di Saturno.

59. Allo sguardo si mostra Saturno come stella di poca luce e di color plumbeo. Esso è diviso in sei zone da strisce oscure perpendicolari all'asse della rotazione, il quale è di $\frac{1}{11}$ minore del diametro che gli è perpendicolare. Trovasi circondato da un anello, il quale secondo le diverse sue posizioni vedesi diversamente proiettato alla nostra vista: una fascia oscura lo divide in due zone. Saturno ha un moto di rotazione molto rapido, poichè la compisce in 10ʰ 15′, e nello stesso senso di tutti i pianeti da occidente in oriente. Il suo diametro ne si mostra, alla media distanza dalla terra, di 16″,2.

Diametro.	9 ,61
Volume	887 ,3
Massa	101 ,0638
Rotazione	0 ,428
Distanza media ☉	9 ,539
Eccentricità relativa	0 ,0562
Eccentricità assoluta.	0 ,5364
Rivoluzione siderea	29 ,48
Inclin. dell'orbita a quella della terra .	2° 29′ 55″

Di Urano.

60. Urano non è visibile senza l'aiuto del telescopio, il suo diametro apparente quando trovasi al perigeo è appena di 12″, ed è perciò stimato $4\frac{2}{7}$, preso quello della terra per unità, quindi sarebbe 77 volte più voluminoso del nostro globo: ne vediamo il diametro per un angolo di 4″, nella distanza media dalla terra.

Diametro.	4 ,26
Volume	77 ,5
Massa	19 ,8089
Distanza media ☉	19 ,183
Eccentricità relativa	0 ,0467
Eccentricità assoluta	0 ,89556
Rivoluzione siderea	84 ,08
Inclin. dell'orbita a quella della terra .	0°.46′ 26

Delle comete.

61. Le comete differiscono da' pianeti non solo per l'apparenza affatto diversa che ne offrono, ma altresì per la varietà de' loro movimenti, non seguendo gran numero di esse la direzione comune a' pianeti da occidente in oriente, nè avendo le orbite poco eccentriche, e poco a quella della terra inclinate. Le loro orbite in generale sono ellissi eccessivamente allungate; e siccome non sono per noi visibili che quando trovansi vicine al perielio, le troviamo com'ellissi aventi il grande asse infinito, e quindi come parabole.

Allorchè può essere assoggettata una cometa alle osservazioni astronomiche, mercè alcune di esse conducenti allo scopo, se ne determinano tre punti dell'orbita, essendo questi sufficienti a determinare una parabola; e quindi a dedurne il suo corso visibile e parabolico, la distanza dal perielio, la posizione di questo punto, l'epoca del passaggio per esso, e i nodi; non che l'ora del suo sorgere e tramontare, il tempo della riapparizione, le stelle alle quali si troverà vicina ec. La cometa compisce poi la sua immensa ellissi nelle sterminate regioni dello spazio che sono oltre la portata de' nostri migliori telescopî; e se

vi sono delle comete ch' effettivamente percorrono delle parabole o ancora delle iperbole esse non torneranno mai più verso di noi.

Di tutte queste orbite intanto egualmente il centro del sole occupa il fuoco ; e per determinarne il movimento , non essendo le comete soggette alla legge di procedere da occidente in oriente , cui tutti i pianeti corrispondono, fa d' uopo conoscere non solo gli stessi elementi necessari a determinare l'orbita di un pianeta; ma di più, se il suo movimento è *diretto* o *retrogrado*. E quantunque le comete obbediscano alle leggi di Keplero , come tutti gli altri corpi celesti , il calcolo non si presta con egual facilità ad indicarne il ritorno , per la circostanza che n' è mestieri da un picciol' arco osservato dedurre l'orbita intera: o almeno sarà necessario attendere molti ritorni di una medesima cometa , per poterne con precisione conoscere i ritorni periodici.

Le comete hanno generalmente il *nucleo* di cui si costituiscono, accompagnato da una *nebulosità*, la quale se la segue dicesi *coda ;* se la precede , *barba ;* se le sta tutta all' intorno , *chioma*. E si è osservato esser la coda sempre diretta alla parte opposta a quella del sole rispetto alla cometa.

LEZIONE VI.

De' satelliti in generale.

62. Oltre de' pianeti primari che descrivono col loro moto proprio delle orbite ellittiche di cui il centro del sole è fuoco comune , come già si è detto , i satelliti descrivendo del pari orbite ellittiche , invece di aver per fuoco il centro del sole , hanno quello del pianeta primario intorno a cui si aggirano ; e , ripetiamo , ciascuno di questi mena seco i propri satelliti in tutta la sua rivoluzione. Essi sono la terra, che ne ha uno il quale si è la luna; Giove, Saturno ed Urano che ne hanno rispettivamente 4, 7 e 6, che soglionsi distinguere col numero progressivo, ciascuno in ordine alla distanza che ha dal pianeta cui appartiene.

Il nostro scopo non permette dilungarci su tal soggetto, ma non possiamo astenerci dal considerare ciò che di più rilevante risguarda la luna. E siccome ne tocca tener direttamente proposito, nella *Quarta Parte* del presente corso, della sua rivoluzione, delle sue fasi e della sua in-

fluenza sulle maree; così ne si offre un secondo motivo di sottrazione a quello già derivante dalla sobrietà che ci avevamo imposto; rimanendoci ora a dir solamente alcuna cosa di quanto non saprebbe ivi trovar luogo.

Della Luna.

63. *Forma.* L'occhio nudo è sufficiente ad avvertirci esser la luna rotonda almeno in un senso; e poichè gli eclissi de' quali ora parleremo ci han convinti della sua opacità, e di esser la luce che tramanda la riflessa di quella che dal sole riceve, abbiam potuto conchiudere, sulle considerazioni delle sue fasi, ch' essa è rotonda in tutti i sensi, e però di forma sferoidale. In fatti, solamente la sfera è tal corpo che illuminato da una luce qualunque, ha un cerchio per piano della separazione della parte illuminata dall'oscura, e se la luce sarà da esso a distanza infinita, il cerchio sarà massimo; ed in ambo i casi il cerchio illuminato sarà perpendicolare alla linea de' centri della sfera proposta e del corpo illuminante.

Or noi abbiamo che una sfera si presenta all' occhio situato a gran distanza sempre come un cerchio perpendicolare alla visuale. Laonde se per la sfera facciamo la luna; pel corpo ch'emana la luce, il sole; ed un punto della superficie della terra, quello dal quale si mira: avremo, che se saranno concorrenti i raggi luminosi e la linea di mira, il cerchio che si presenta allo sguardo sarà il disco illuminato; se i raggi luminosi e la linea di mira staranno a dirittura, ma procedenti da parti opposte, allo sguardo starà rivolto il disco oscuro; ma se finalmente i raggi luminosi e la linea di mira faranno angolo, bisognerà che i cerchi a tali rette perpendicolari facciano un angolo eguale; e però al nostro sguardo si presenterà dell'emisfero illuminato un fuso sferico di tanti gradi d'inclinazione, di quanti appunto lo è l'angolo fatto dalla visuale e dalla congiungente de' centri del sole e della luna. Così quando la luna è a 90° dal sole rispetto a noi, ne dovrà presentare un emisfero che si comporrà di metà dell'emisfero illuminato e metà dell'emisfero oscuro, o sia dovrà offrirsi allo sguardo come un mezzo cerchio illuminato. Il fatto corrisponde all'ipotesi in tutti i casi possibili, dunque questa è giusta; cioè la luna è di forma globulare.

64. *Distanza dalla terra.* La distanza della luna dalla terra, ottenutasi con diversi metodi analoghi ad alcuni di quelli impiegati a misurar la distanza del sole, è in quantità media di circa 86 000 leghe, cioè $\frac{1}{392}$ di quella che ha la terra dal sole.

65. *Diametro e volume.* Il diametro della luna, assunto 86 000 leghe come sua distanza media dalla terra, si è trovato di $\frac{3}{11}$ del diametro medio della terra, cioè di 783 leghe circa (28). Avuto il diametro, sarà facile dedurre il suo volume essere nel rapporto di 27 : 1331 con quello della terra; cioè come il cubo di tre al cubo di undici.

66. *Orbita.* Poichè il diametro della luna non è al nostro sguardo costantemente della stessa quantità angolare, ma in 14 giorni si mostra sotto gli angoli da 29′ $\frac{1}{2}$ fino a 33′ $\frac{1}{2}$, dobbiamo conchiudere che nel primo caso è al suo apogeo, e nel secondo caso al suo perigeo; e che in conseguenza la sua orbita non è un cerchio ma una specie di ellisse della quale il centro della terra occupa uno de' fuochi. Ed essendo la sua distanza apogea di leghe 90730 e la perigea di 81270, la media sarà di 86000, e l'eccentricità di 4730; o sia di 0,055, prendendo 86 000 leghe per unità.

67. *Inclinazione dell' orbita.* Inoltre, un osservatore situato sul cerchio massimo della rotazione terrestre, vede dalla sua perpendicolare, nel corso di una rivoluzione della luna, allontanarsi questa di 5° 8′ 49″ più che non se ne mostra distaccare il sole, considerati entrambi nel piano che passa per la perpendicolare anzidetta e pe' poli della rotazione il quale fra non molto chiameremo *meridiano*; ma il centro del sole è nel piano dell' orbita terrestre, adunque l' orbita della luna è inclinata a quella della terra per 5° 8′ 49″ in quantità media; giacchè le attrazioni degli altri pianeti fanno poi variare tale inclinazione per circa 17′ 30″.

68. *Movimento del grande asse e della linea de' nodi.* L' attrazione del sole sulla luna ne allunga l' orbita, quando si esercita nella direzione del grande asse, ed in tutti gli altri casi vi produce un con-

tinuo movimento da occidente in oriente per 3 gradi al mese circa, di modochè l' apogeo tornerà alla stessa posizione, rispetto alla terra e ad una stella fissa, dopo 9 anni circa. Questo movimento dell'apogeo e la circostanza di dover la luna, mentre descrive la propria orbita, seguir la terra in tutta la sua traslazione, fanno che il nodo ha un movimento di circa 30° in 18 mesi e nel senso opposto al movimento dell'apogeo lunare e della traslazione della terra, cioè da oriente in occidente, e compiesi l' intero suo giro in 18 anni e 223 giorni.

69. *Rotazione*. Siccome la luna ci offre nel suo disco illuminato delle macchie visibili ancora ad occhio nudo, e queste son sempre le stesse e similmente disposte rispetto a se medesime e rispetto a noi, così dobbiamo inferirne aver essa sempre lo stesso diametro diretto verso la terra, e che questo non è l' asse della rotazione. Sia T (*fig.* 20.) la terra nella sua orbita, e intorno ad essa giri la luna L; allorquando questa trovasi nel punto B espone al sole lo stesso emisfero che alla terra, ma giunta in C gli esporrà l' emisfero opposto; imperocchè verso la terra tiene sempre rivolto l' emisfero medesimo: e simile ragionamento potrà tenersi per qualunque punto esteriore all' orbita sua. In guisa che, compiuta la rivoluzione, avrà successivamente esposto ai raggi del sole tutti i punti di uno de' suoi cerchi massimi; o sia, avrà compiuta *una rotazione della stessa e precisa durata della rivoluzione, in quanto a un punto esterno alla sua orbita, benchè non abbia minimamente cangiato di aspetto, relativamente alla terra.*

70. *Degli eclissi in generale*. Suol dirsi *eclisse* di un pianeta qualunque, il fenomeno per lo quale gli manca durante qualche tempo la luce, per la interposizione di un altro pianeta, il quale essendo presso o nella linea de' centri del sole e del primo pianeta, non fa a questo pervenire i raggi luminosi in parte o in tutto. Noi limitandoci a ciò che più da vicino ne risguarda, diremo *eclisse terrestre* quello per lo quale, la luna interponendosi tra il sole e noi, ne sospende per qualche tempo in tutto o in parte il godimento de' raggi solari: questo impropriamente è detto ancora *eclisse solare*; e diremo *eclisse lunare* il fenomeno derivante dal trovarsi la terra interposta tra il sole e la lu-

na, ond'essa rimane certo tempo senza luce. Sia AB (*fig. 21.*) il diametro del sole e CD quello della terra perpendicolari alla linea de' centri TS. Da' punti A è B si menino le due tangenti la terra AC e BD; e si prolunghino finchè concorrano al punto M.

Or se s'immagini un cono ABM, il tronco ABDC sarà illuminato, e la parte CDM rimarrà oscura. Quindi se la luna girando intorno la terra si troverà traversando la parte illuminata come in L, avverrà eclisse di terra; e se troverassi a passare per la parte oscura, come in L' avverrà eclisse di luna.

71. *Distinzione degli eclissi.* Nel traversare la luna la parte illuminata o la parte oscura del cono ABM testè da noi considerato, non sempre passa per l'asse MS, e spesso avviene che ne ingombra una parte soltanto, quindi siegue la distinzione di *eclisse centrale* ed *eclisse eccentrico.*

L'eclisse eccentrico è generalmente *parziale* poichè solo una parte dell'astro cessa di esser visibile. L'eclisse centrale, benchè sembri dover esser sempre totale, è in effetto *totale* o *anulare* rispetto alla terra. Dicesi *eclisse totale* quando il sole ci si nasconde interamente; ed *anulare* allorquando ad onta di esser la luna precisamente in L, rimane visibile del sole un cerchio luminoso tutto all'intorno della luna. Gli eclissi centrali di luna però son sempre totali.

72. *Degli eclissi terrestri.* Se un eclisse centrale avviene per la terra quando essa è all'afelio o nelle vicinanze di questo, ed intanto la luna sia perigea o quasi, l'eclisse centrale sarà sempre totale. Imperciocchè in tal caso il nostro angolo visuale pel diametro del sole sarà di 31' 30'' mentre quello per la luna sarà di 33' 31''; e quindi il primo essendo contenuto dal secondo, non potrà esser visibile alcuna parte del disco solare.

Nel caso poi che si consideri la terra al perielio è più difficile vedersi verificare l'eclisse totale, per la ragione che in tal circostanza l'angolo visuale del diametro del sole è di 32' 35'', per cui è d'uopo che la luna sia almeno molto vicina al perigeo, onde l'angolo visuale del suo diametro riesca maggiore di tal quantità. Se d'altronde l'eclisse cen-

trale avvenga nelle circostanze della luna apogea o circa, quando l'angolo visuale del suo diametro è appena di 29′ 22″, l'eclisse sarà anulare, dappoichè qualunque sia il punto dell'orbita in cui la terra si trovi, il diametro del sole si offrirà allo sguardo sotto un angolo sempre maggiore di tal quantità; e quindi rimarrà visibile del suo disco un anello intorno intorno la luna.

Finalmente gli eclissi eccentrici non potranno per la terra che difficilmente esser totali, essendo di soli 2′ la differenza tra il massimo diametro della luna ed il minimo diametro del sole; e poichè il minimo diametro della luna è di 29′ 22″, ed il massimo del sole di 32′ 35″, la piccola differenza di 3′ 13″ tra essi, rende similmente molto rari gli eclissi anulari, quando non siano assolutamente centrali.

73. *Degli eclissi di luna.* Allorchè un eclisse di luna è centrale deve necessariamente esser totale, per la ragione che il suo diametro è meno di $\frac{3}{7}$ del diametro che ha il cono d'ombra della terra nel sito ove la luna lo traversa. Cioè, essendo noti AB (*fig. 21.*) CD e TS, si avrà MT = 310 635 leghe. In oltre TL′ = 86 000, perciò ML′ = 224 635. E facendo la proporzione MT : ML′ :: CD : x = 2075 leghe, si otterrà il diametro del cono d'ombra nel punto L′; ma la luna ha un diametro di 783 leghe, laonde questo è meno di $\frac{3}{7}$ del diametro che il cono ha nel sito ove trovasi la luna. Per tal ragione si ha che gli eclissi eccentrici della luna possono essere ancora totali: in fatti, tutta l'ampiezza che ha ivi il cono sta al disco lunare :: $(5)^2 : (2)^2 :: 6\frac{1}{4} : 1$; e perciò potrà spesso avvenire il caso or ora enunciato.

74. *Frequenza degli eclissi.* È chiaro che avendo il cono ABM ampiezza maggiore in L che in L′, il numero degli eclissi terrestri sarà maggiore di quello degli eclissi lunari. In fatti di 70 eclissi che nel periodo di 18 anni vi sono, se ne contano 41 terrestre e 29 lunari.

75. *Digiti.* Volendo negli eclissi parziali dinotare la parte della luna che resta ottenebrata dalla terra, o la parte del sole che la luna ne impedisce vedere nell'eclisse terrestre, si è ricorso a supporre diviso in 12 parti eguali col nome di *digiti* il diametro sì dell'una che del-

l'altro e di qualunque pianeta in generale, ognuno de' quali si suddivide poi in 60 minuti. E però dicendo un eclisse parziale di luna essere di 7 digiti, vuolsi intendere che dalla terra verranno oscurati $\frac{7}{12}$ del suo diametro; e quando per un eclisse parziale di terra, questa è in parte oscurata, indicheremo il fenomeno con dinotare invece, la parte del diametro del sole, la quale per l'interposizione della luna ne viene ascosa; analogamente al consueto e general costume di riferire al sole tutti i fenomeni derivanti da' movimenti della terra.

Diametro	0,27
Volume	0,0204
Massa.	0,0154
Distanza media ⊕	1,000
Eccentricità relativa	0,055
Eccentricità assoluta.	0,00014
Rotazione	27,322
Rivoluzione.	0,075 = 27^g,322
Inclinazione dell'orbita a quella della terra.	5° 08′ 52″

De' satelliti di Giove, Saturno ed Urano.

76. I quattro satelliti di Giove, visibili solamente con buoni cannocchiali, trovandosi, nel corso delle loro orbite, dalla parte del sole rispetto al pianeta, gettano su di questo la loro ombra; ed allorchè trovansi dalla parte opposta, vengono oscurati dal cono d'ombra di esso pianeta; cioè, ne mancano alla vista, comechè non trovinsi per anco nascosti di retro al pianeta; adunque nè Giove nè i suoi satelliti splendono di luce propria, ma la ricevono dal sole. Inoltre, le fasi che offrono ci rendono egualmente sicuri (63) della loro forma globulare, e le continue ed accurate osservazioni dirette ad osservare il loro andamento e le loro fasi ci han fatto conoscere che tutti, come ancora quelli di Saturno, hanno la rotazione di eguale durata della rivoluzione; quindi conchiuderemo esser *legge generale pe' satelliti non aver rotazione diversa da quella dipendente dalla rivoluzione* (69).

Nel seguente quadro assumiamo per unità della distanza media di ciascun satellite dal pianeta cui appartiene, il raggio del rispettivo pianeta;

per la massa quella ancora del pianeta cui si riferisce ; e finalmente per la durata della rivoluzione e rotazione, il nostro giorno medio solare : eccetto solo che per l'anello di Saturno la distanza sarà indicata dal centro dell'ellisse generatrice.

SATELLITI	DISTANZA MEDIA dal pianeta.	DURATA della rivoluzione e rotazione.	MASSA.
di Giove.			
1	6,0485 . . .	1',7961 . . .	0,000017
2	9,6235 . . .	3 ,5512 . . .	0,000023
3	15,3502 . . .	7 ,1546 . . .	0,000088
4	26,9983 . . .	16 ,6888 . . .	0,000043
di Saturno.			
Anello . .	2,06	0 ,427	
1	3,35	0 ,943	
2	4,30	1 ,370	
3	5,28	1 ,888	
4	6,82	2 ,739	
5	9,52	4 ,517	
6	22,08	15 ,945	
7	64,36	79 ,330	
di Urano.			
1	13,12	5 ,893	
2	17,02	8 ,707	
3	19,85	10 ,961	
4	22,75	13 ,456	
5	45,51	38 ,075	
6	91,01	107 ,694	

77. ***Velocità della luce.*** Le osservazioni dirette agli eclissi de' satelliti di Giove, onde veder come corrispondessero al calcolo, hanno offerto il mezzo da valutare l'immensa velocità della luce; e noi stimando cosa utile il dar qui un' idea del modo onde vi si è pervenuto ci contenteremo del seguente cenno.

Essendosi giunto a determinar con precisione l'istante in cui dovea cominciare e finire il passaggio di ognuno de' quattro satelliti di Giove a traverso del suo cono d'ombra; si è notato esser il calcolato passaggio di accordo con le osservazioni, allorchè la terra trovasi al perielio, e Giove dalla medesima parte rispetto al sole; ed avere il fenomeno sempre 16′26″,4 di ritardo relativamente al calcolo, se essendo la terra all'afelio, quel pianeta rimane dalla parte opposta di essa relativamente al sole. Or la diversità delle distanze fra la terra e Giove, nel primo e nel secondo degli esposti casi, è il grande asse dell'orbita terrestre o sia 68 000 000 di leghe; dunque la luce impiega 16′26″,4 a percorrere questo spazio, e però solo 8′13″,4 per giugnere dal sole a noi; o sia, percorre 4 250 000 leghe in ogni minuto.

LEZIONE VII.

Dell' Orizzonte.

78. È cosa ben facile anche per l'uomo del più basso intendimento immaginare la terra librata nello spazio immenso dell'universo, e che ciascun punto della sua superficie corrisponda esattamente ad un punto determinato del cielo, cioè di quella immensa volta che la brevità della nostra vista ne mostra terminare da per tutto con la estensione della visuale; e che d'altronde essendo essa ad una distanza infinita, noi senza tema di errare, possiamo ben considerarla, come sfera concentrica alla terrestre.

Ed ogni osservatore vedrà tutto all'intorno di sè un cerchio terminatore, il cui piano tangente la superficie della terra, separa la parte visibile del cielo dalla invisibile: esso vien detto *orizzonte visibile*. E quel punto del cielo che sovrasta direttamente al luogo, cioè, che trovasi in linea retta col raggio menato dal centro della terra al luogo (36), dicesi *zenit*, e l'altro diametralmente opposto, *nadir;* e finalmente la linea retta che unisce questi due punti è denominata *verticale*.

79. L'orizzonte sensibile però non divide la sfera celeste in due parti eguali, perocchè bisognerebbe che passasse per lo centro della terra; laonde se noi consideriamo un cerchio che passi per lo centro della

terra e sia parallelo all'orizzonte sensibile, e lo supponghiamo protratto all'infinito, esso dividerà la sfera celeste in parti eguali, e sarà distante dall'orizzonte sensibile della sola quantità del raggio della terra: cioè, d'un intervallo infinitamente piccolo rapporto all'immensità della distanza sotto cui si considera la sfera celeste.

E quindi chiameremo questo cerchio *orizzonte razionale;* ed avremo che l'orizzonte sensibile non differisce dal razionale, che solo in quanto agli oggetti che ne circondano sulla terra; ma rispetto alle stelle, non debbono entrambi esser considerati che come un solo orizzonte.

Inoltre diremo, che la verticale è l'asse dell'orizzonte, ed i suoi estremi, cioè lo zenit ed il nadir, sono i suoi poli; che a misura che cambiasi luogo sulla superficie della terra si cambia zenit, nadir, linea verticale ed orizzonte; e che essendo infiniti i punti della superficie di una sfera, infiniti sono ancora i diversi zenit, nadir ed orizzonti.

80. Diconsi *paralleli di altezza* o di elevazione que' cerchi paralleli all'orizzonte che possono immaginarsi nell'emisfero visibile; e que' cerchi paralleli all'orizzonte che possono immaginarsi nell'emisfero invisibile si addimandano *paralleli di depressione*.

81. Essere un astro in altezza o in depressione, vale il trovarsi l'astro nello emisfero visibile o invisibile: cioè, dicesi *altezza dell'astro* l'arco di cerchio massimo intercetto tra l'astro e l'orizzonte, ed a questo perpendicolare; e dicesi *depressione* di un astro, l'arco di cerchio massimo perpendicolare all'orizzonte ed intercetto tra esso e l'astro. E questi archi di cerchi massimi che servono a misurare le altezze e le depressioni degli astri, dovendo esser tutti perpendicolari all'orizzonte, apparterranno a cerchi che passano pe' suoi poli, o sia per lo zenit e pel nadir, e quindi avranno per comune sezione la linea verticale, onde vengon denominati *cerchi verticali*.

82. Sì le altezze che le depressioni degli astri non possono contare più di 90° ch'è appunto la distanza dell'orizzonte dal suo polo; e ciò si direbbe di un astro che si trovasse allo zenit o al nadir dell'osservatore rispettivamente.

LEZIONE VIII.

Dell'Equatore e suoi paralleli.

83. Siccome in natura tutto è in moto, e la terra e gli astri sono in movimento nella immensità dello spazio, sotto determinate leggi, diviene di assoluta e principale importanza l'esaminare i movimenti della terra e le apparenze che ne risultano, non che i fenomeni che gli astri offrono agli occhi di un osservatore da un sito qualunque della superficie del globo.

Per ora noi, prendendo a considerare il moto di rotazione della terra, facilmente ci convinciamo doversi tal movimento verificare intorno ad uno de' suoi diametri, il quale come abbiamo di già detto (38 e 48) chiamasi ***asse della terra***, e ***poli della terra*** i suoi estremi.

84. Questa rotazione della terra intorno al proprio asse, che si verifica con moto equabile, ne mena immediatamente alle seguenti induzioni:

1.° Che ogni punto della superficie della terra descrive un cerchio il cui piano è perpendicolare all'asse terrestre; e però ha per raggio la perpendicolare menata dal punto proposto, all'asse della terra.

2.° Che ogni punto egualmente distante da' due poli descrive un cerchio massimo, il quale avrà per asse e per poli, quelli del globo terrestre: esso è denominato ***equatore;*** e se lo supporremo protratto fino al cielo avremo l' ***equatore celeste.*** L'equatore come cerchio massimo dividerà la terra in due emisferi, quello ove trovasi l'Europa dicesi ***boreale, artico, settentrionale*** o ***nord;*** e l'altro, ***australe, antartico, meridionale*** o ***sud,*** e similmente i poli che vi corrispondono; nomi tutti che loro vengono da' poli celesti cui si riferiscono.

3.° Che i cerchi descritti da' diversi punti della superficie del globo, durante una sua rotazione intorno all'asse, sono sempre più piccoli a misura che dall'equatore si allontanano: e tutti questi cerchi minori ad esso paralleli, son detti per antonomasia semplicemente ***paralleli,*** i quali sogliono poi prendere ancora il nome del luogo pel quale passano, come parallelo di Parigi, parallelo di Napoli, ec.

4.° Che se la terra gira intorno all'asse da occidente in oriente,

come tutti i fenomeni celesti comprovano, un osservatore, in qualunque luogo si trovi, dovrà vedere gli astri passare da oriente in occidente; con la sola differenza che quello più vicino all' equatore li vedrà passare con maggior velocità di chi se ne trovi più lontano. Ed in conseguenza di tali apparenze, e per adattarci ancora al linguaggio nella società più ricevuto, noi ci esprimeremo in seguito come realmente il sole e gli astri tutti girassero da oriente in occidente in 24 ore, cioè nello stesso intervallo di tempo che la terra impiega a compiere una rotazione intorno all' asse, e che da tempo immemorabile trovasi diviso in 24 parti eguali, dette *ore.*

85. Essendo la terra di figura sferica o quasi sferica, in guisa che non può darsi un passo senza cangiar d' orizzonte, seguirà che gli orizzonti de' diversi luoghi in generale si taglieranno con l' equatore sotto tutti gli angoli possibili. Cioè, gli orizzonti de' diversi punti dello equatore lo taglieranno ad angoli retti; quelli corrispondenti ai due poli si confonderanno con esso, e finalmente tutti gli orizzonti relativi agli altri infiniti punti della terra lo taglieranno ad angolo obliquo. Quindi deriva la distinzione di *tre posizioni di sfera; retta, parallela* ed, *obbliqua,* secondo si verifica uno de' tre casi summentovati. Comunque però s' incontrino questi due cerchi massimi, dovendo di necessità dividersi in due parti eguali, e le loro circonferenze in due punti diametralmente opposti, questi vengono indicati coi nomi di *oriente, levante, est* l' uno dalla parte ove ne sembra che sorgano gli astri; e l' altro *occidente, ponente, ovest* dalla parte ove sembra che tramontino.

86. Quell' uno tra gl' infiniti verticali che ha con l'orizzonte la stessa comune sezione che vi ha l'equatore, dicesi *primo verticale:* gli estremi di tal comune sezione sono adunque l' *oriente* e l' *occidente.*

87. L'arco di orizzonte compreso tra il primo verticale e quel punto dell'orizzonte ove sorge o tramonta l' astro, dicesi *amplitudine.* E però l' amplitudine distinguesi co' nomi di *ortiva* se è relativa al sorgere dell' astro, e di *occidua* se è relativa al tramonto. E siccome gli astri

ad eccezione di quelli che percorrono l'equatore sorgono e tramontano secondo trovansi nell'emisfero boreale o nell'australe, così ciascuna delle dette due amplitudini ha una seconda distinzione: cioè, *ortiva boreale* ed *ortiva australe*; *occidua boreale* e *occidua australe*, secondo è il quadrante dell'orizzonte in cui sorge o tramonta l'astro.

88. La distanza dall'equatore, o l'arco di cerchio massimo perpendicolare all'equatore, interposto tra questo ed un punto qualunque della superficie della terra, dicesi *latitudine del luogo*. La latitudine adunque è di due specie boreale o australe secondo l'emisfero in cui trovasi il luogo, e non giunge che a 90°, latitudine che appartiene a' poli.

Si chiamano *cerchi di latitudine* tutti que' cerchi, che servono a misurare le latitudini: essi dovendo essere perpendicolari all'equatore passeranno pe' suoi poli, ed avranno per comune sezione l'asse della terra.

89. In quanto poi all'equatore celeste, è denominata *declinazione di un astro* la distanza che esso ha dall'equatore; e *cerchi di declinazione* que' cerchi massimi della sfera celeste che passando pe' poli del mondo sono perpendicolari all'equatore, e servono a misurare le declinazioni degli astri: e le declinazioni parimenti sono di due specie boreale ed australe, e giungono fino a 90°, ch'è quella de' poli; e perciò gli astri sull'equatore non hanno declinazione; e quelli su due paralleli ad egual distanza dall'equatore hanno eguale declinazione, ma di diversa specie.

90. La *distanza polare di un astro* è l'arco di cerchio di declinazione intercetto tra l'astro ed il polo che si contempla nella circostanza, laonde essa è uguale al complemento della declinazione.

91. *De' cerchi minori della sfera.* Poichè in virtù della rotazione della terra intorno all'asse, ne sembra il sole descrivere ogni giorno un cerchio parallelo all'equatore, tal parallelo sarà tanto più piccolo quanto più dall'equatore si allontana. Ma trovandosi l'asse della terra inclinato al piano dell'orbita per 23° 28′, siegue che il parallelo, che ne sembra il sole descrivere intorno la terra, qualunque sia la posizione dell'asse

di questa rispetto al raggio vettore, non potrà mai, così fatto parallelo, oltrepassare la distanza di 23° 28′ dal piano dell'equatore. Or tali due paralleli estremi, che pel moto diurno della terra sembra il sole descrivere, cioè quelli distanti per 23° 28′ dall'una e dall'altra parte dell'equatore diconsi *tropici*, dalla voce greca *tropos*, che vale cambiamento; perchè giunta la terra ad aver con la sua rotazione il sole agli zenit di tutti i punti successivamente di tal parallelo, così dall'uno che dall'altro emisfero, ritorna poi ad avere il sole agli zenit successivi degli altri paralleli meno distanti dall'equatore. Ed a noi tal movimento offre l'apparenza che il sole, cessando di accostarsi al polo verso cui obliquamente e con moto aspirale si avvicinava, cangi andamento, e di nuovo si accosti all'equatore. Dicesi *tropico di cancro* quello dell'emisfero boreale; e *tropico di capricorno* quello dell'emisfero australe.

Que' cerchi minori paralleli all'equatore e da esso distanti per 66° 32′ chiamansi cerchi polari, da che hanno alle loro periferie i poli della eclittica (112).

92. Quest'asse, e questi poli dell'equatore celeste si addimandano ancora *asse* e *poli del mondo*, analogamente, a quanto si è praticato per l'equatore terrestre, cui han dato i nomi, come già si è detto (84).

93. Or siccome tanto i tropici che i cerchi polari son considerati egualmente sul globo terrestre e sulla sfera celeste, e rappresentano dei cerchi minori di sfere cotanto disuguali ma concentriche, per concepirne l'esatta corrispondenza bisogna immaginare un cono retto che per base abbia uno di tali cerchi della sfera celeste, come per esempio il tropico di cancro, e per vertice il centro della terra: la sezione che la superficie di tal cono fa sul globo terrestre, sarà il tropico di cancro terrestre.

94. *Delle differenti posizioni di sfera.* Nella posizione di *sfera retta* (85) dovendo l'orizzonte stare ad angolo retto con l'equatore ed i suoi paralleli, dovrà passare pe' suoi poli che sono i poli del mondo, come l'equatore dovrà passare per lo zenit e per lo nadir che sono i poli dell'orizzonte.

95. Tutti gli abitanti situati sull' equatore terrestre, avendo i loro vertici nella periferia dell' equatore celeste, osserveranno i seguenti fenomeni: Non avranno latitudine, o vero saranno privi di altezza di polo; non avranno declinazione di vertice; non avranno primo verticale diverso dall' equatore, perchè saranno questi cerchi insieme confusi; vedranno sorgere e tramontare gli astri perpendicolarmente allo orizzonte, e ciascuno di questi impiegare 12 ore a passar per l'emisfero visibile ed altrettante a passare per l' invisibile.

96. Nella posizione di *sfera parallela* in cui l'orizzonte e l'equatore formano un sol cerchio (85) è necessario che la verticale si confonda con l' asse del mondo, e lo zenit ed il nadir co' poli di esso. Descrivendo gli astri l'equatore o cerchi all' equatore paralleli, saranno questi similmente tutti paralleli all'orizzonte; e però gli astri che sono nell'emisfero visibile non tramonteranno mai, nè mai sorgeranno quelli dell'emisfero invisibile. Ed in riguardo al sole, che noi consideriamo in vece della terra avere un corso obliquo all' equatore, quando si troverà a descrivere i paralleli dell'emisfero visibile non tramonterà, nè sorgerà quando troverassi a descrivere quelli dell' emisfero invisibile.

97. In questa posizione di sfera non distinguonsi oriente nè occidente; quindi non vi sarà amplitudine, ma essa potrà notarsi solo nelle due posizioni di sfera *retta* ed *obliqua*.

98. Nella posizione di *sfera obliqua* (85) finalmente, i fenomeni sono diversi, ed i principali sono i seguenti:

1.° Dall' uscire che farà l'abitatore della terra dal piano dell'equatore, il suo vertice parimenti si allontanerà dalla periferia dell'equatore celeste, ed il polo verso cui si dirige si eleverà per conseguenza sull' orizzonte della medesima quantità, e quindi l' altezza del polo sarà uguale alla declinazione del vertice ed alla latitudine del luogo.

2.° Vedrà sorgere e tramontare gli astri obliquamente all' orizzonte; e tagliando questo inegualmente i paralleli, in modo che ne resta una porzione maggiore nell'emisfero visibile ed una minore nell' invisibile, per tutti quelli che sono nell' emisfero del polo elevato, così

gli astri che si troveranno a percorrere questi paralleli si tratterranno su l'orizzonte più tempo di quanto impiegano a percorrere le porzioni di paralleli che sono nell'emisfero invisibile. E per lo contrario, gli astri che percorrono i paralleli che trovansi nell'emisfero del polo depresso: essi spenderanno maggior tempo a percorrere le porzioni di paralleli che si trovano nell'emisfero invisibile di ciò che impiegano a percorrere le porzioni dell'emisfero visibile. Gli astri poi che percorressero paralleli non intersecati dall'orizzonte, non tramonteranno mai se appartengono all'emisfero del polo elevato, e non sorgeranno mai se sono nell'altro opposto emisfero.

3.° Finalmente per conseguenza di ciò che si è ora detto, quando il sole percorre i paralleli del polo elevato, essendo gli archi diurni maggiori de' notturni, saranno i giorni maggiori delle notti; e viceversa, quando trovasi nell'emisfero del polo depresso saranno le notti maggiori de' giorni.

LEZIONE IX.

Del Meridiano.

99. Quell'uno tra gl'infiniti cerchi di declinazione che passa per lo zenit di un luogo dicesi *meridiano celeste del luogo;* ed è così detto perchè passando esso pe' poli dell'orizzonte e dell'equatore è perpendicolare all'uno ed all'altro, e quindi divide in parti eguali tutte le porzioni di paralleli che sono nell'emisfero visibile e nell'invisibile; ed in conseguenza, dividendo ancora in parti eguali quelli che ne apparisce descrivere giornalmente il sole, quando quest'astro sarà alla metà del suo passaggio al di sopra dell'orizzonte e si troverà in tal cerchio, si ha l'istante del meriggio, rispettivamente sopra ciascuno orizzonte: come similmente a mezzanotte si troverà il sole nel semimeridiano inferiore. Anzi sogliono distinguersi i due archi in cui l'orizzonte taglia i paralleli che dal sole sembrano descritti, in *archi diurni* i superiori, ed *archi notturni* gl'inferiori.

100. I due emisferi ne' quali il meridiano divide la sfera prendono nome da' suoi poli, che sono necessariamente l'oriente e l'occidente: indi emisfero *orientale* ed emisfero *occidentale.*

101. La sezione che il meridiano celeste fa sulla terra vien detta *meridiano terrestre ;* per cui il meridiano terrestre di un luogo è quell'uno fra gl'infiniti cerchi di latitudine, il quale passa pel luogo.

102. E da ciò rilevasi che tutti i luoghi che sono nello stesso meridiano, avranno il mezzodì nel medesimo istante; per la qual cosa, essendo infiniti i meridiani, ad ognuno di essi si avrà il mezzodì in un istante diverso: quelli che saranno più all'oriente avranno mezzodì prima di quelli che sono più all'occidente.

103. Il sole adunque girando, secondo l'apparenza, intorno della terra illumina successivamente tutti i differenti punti della sua superficie: o, in realtà, girando la terra intorno all'asse espone successivamente tutti i suoi punti alla luce del sole. Or se questa rotazione della terra che può esser rappresentata dalla rivoluzione di un punto dello equatore, ci facciamo a considerare sotto i due aspetti dello spazio e del tempo impiegato a percorrerlo, avremo che al termine di una rotazione il punto avrà descritto un cerchio, ed il tempo impiegato a descriverlo sarà un giorno (38), e perciò avremo l'analogia

$$grado : hora :: 360^\circ : 24^h :: 15 : 1$$

e quindi $g = h \times 15 = h \times \frac{60}{4}$

$$h = g \times \frac{1}{15} = g \times \frac{4}{60}.$$

Le quali due espressioni finali portansi sotto l'aspetto qui presentato, perchè trovandosi esser sessagesimali le suddivisioni tanto dei gradi che delle ore, riesce assai comodo aver per fattore nel primo caso, e per divisore nel secondo caso il numero 60; perciocchè basterà avanzare o posporre di una classe le parti del proposto numero complesso, per adempiere alla moltiplica o alla divisione: In fatti

1.° . . . $g = h \times \frac{60}{4}$, se si ponga $h = 3^h\ 7'\ 54''$ $\underline{|\ 4}$

$$g = 46^\circ\ 58'\ 30''$$

2.° . . . $h = g \times \frac{4}{60}$, e se facciamo $g = 46^\circ\ 58'\ 30''$

$$\frac{4}{h = 3^h\ 7'\ 54''\ 00'''}$$

104. Dunque se due meridiani terrestri sono distanti sull' equatore, per 15°,30°,45°, ec. avranno il mezzogiorno e conteranno sempre 1,2,3, ec. ore prima o dopo l'uno dell'altro. E mentre è mezzodì in un luogo, sarà mezza notte per tutti gli altri situati nel semimeridiano inferiore, cioè a 180° di distanza contati sull' equatore. Questa distanza che i meridiani de' luoghi hanno tra loro, dicesi *longitudine:* essa contasi sull' equatore da occidente in oriente tanto in tempo che in gradi da 0^h sino a 24^h, o da 0° sino a 360°; ed al presente suole ancora distinguersi in 180° est e 180° ovest, partendo dal meridiano di un luogo di cognita posizione geografica, detto perciò *primo meridiano.* Gli antichi avevano generalmente adottato per primo meridiano quello dell'isola del Ferro ch'è la più occidentale delle canarie; ma oggidì le grandi nazioni contano la longitudine tutte rispettivamente dal meridiano de' loro principali Osservatorî astronomici, così gl' Inglesi si avvalgono di quello di Greenwich, i Francesi di quello di Parigi, ec. ec.

105. Or chiaramente si comprende che se due navigatori partono nel giorno stesso da un medesimo porto, l' uno verso l' est, l' altro verso l' ovest, e compiscono ciascuno il giro della terra, avranno al ritorno due giorni di differenza tra loro; dappoichè quello che ritorna per ovest conterà un giorno di più, e quello che andò per ovest e ritorna per l' est del porto, conterà un giorno di meno di quanto si conta nel luogo di partenza.

106. Gli astronomi numerano le ore secondo l' apparente rivoluzione giornaliera del sole, dal semimeridiano superiore ed ivi le terminano, e lo chiamano semicerchio dell' ora XXIV; mentre l' altro semimeridiano al di sotto dell' orizzonte nominano semicerchio dell' ora XII; e tutti gli altri cerchi di declinazione che servono di meridiani agli altri luoghi son detti semplicemente cerchi orarî, i quali prendono inoltre un nome aggiunto, dalla distanza in tempo in cui sono dal meridiano del luogo che si contempla, contata da oriente in occidente. Talchè il semicerchio di declinazione a 15° di distanza verso ponente, dal meridiano del luogo, dicesi semicerchio dell' ora prima, e così di seguito.

107. Siccome sull'orizzonte di ogni luogo della terra, il primo verticale segna i veri punti est ed ovest; così il meridiano, passando pei poli del mondo segnerà su di esso orizzonte altri due punti egualmente cardinali, detti l'uno *settentrione, tramontana, nord,* e l'altro *ostro, mezzogiorno* o *sud,* i quali saranno precisamente i poli del primo verticale. Laonde il primo verticale, il meridiano e l'orizzonte di ogni luogo si dividono reciprocamente in quattro parti eguali, perchè ciascuno di essi passa pe' poli degli altri due; e perciò ogni arco di ciascuno di essi cerchi, compreso tra l'uno e l'altro de' rimanenti due sarà arco di quadrante; e quindi sull'orizzonte vi saranno 90° dal nord all'est o all'ovest, come ancora dal sud ai medesimi punti est ed ovest.

L'angolo poi fatto allo zenit dal meridiano con ciascuno dei cerchi verticali si denomina *azzimutto*, e si conta per lo più fino a 180° sempre dal nord, ma talvolta ancora dal nord e dal sud, per 90° est e 90° ovest. Allorchè però si contempla un oggetto terrestre, e vuolsi indicar l'azzimutto per l'angolo fatto sull'orizzonte dalle due comuni sezioni del meridiano e del verticale che passa per l'oggetto, in tal caso si preferisce il secondo degl'indicati modi: cioè si conta fino a 90°, e gli si dà ancora il nome di *rombo di vento, rombo navigato, rotta della nave, rilevamento* o *rilevazione* di un luogo, ec. analogamente alle diverse circostanze cui si riferisce.

108. *De' coluri.* Se immaginiamo un cerchio massimo passare pei poli dell'equatore e pe' due punti ne' quali la declinazione del sole è massima, dicesi *coluro de' solstizi.* E dicesi *coluro degli equinozi* quel cerchio massimo della sfera che passando pe' poli del mondo passa ancora pe' due punti ne' quali è nulla la declinazione del sole.

Laonde i due coluri sono in fatti quei due meridiani celesti o quei due cerchi di declinazione che passano l'uno pe' due punti solstiziali e l'altro pe' due punti equinoziali, da' quali punti traggono rispettivamente il nome; e s'intersecano tra loro ad angoli retti come nella seguente lezione s'intenderà.

LEZIONE X.

Dell' Eclittica.

109. La terra, oltre del moto di rotazione intorno al suo asse, avendo ancora un moto di traslazione, per lo quale percorre una curva ellittica detta *orbita terrestre*, in uno de' fuochi della quale è fisso il sole (23); così oltre al fenomeno diurno di vedersi dalla superficie della terra girare intorno da levante a ponente nello spazio di 24 ore il sole e tutti gli altri corpi celesti, ne occorre ancora di osservare che il sole corrisponde continuamente a diversi punti della sfera celeste, a misura che cambia luogo la terra nella sua orbita; e poichè questo moto della terra è sempre nello stesso piano e si verifica nello stesso senso della rotazione, cioè da occidente in oriente, così ne sembra che il sole ogni giorno si accosti della medesima quantità angolare similmente da occidente in oriente, e sempre nello stesso piano. Or questa traccia nella sfera celeste de' punti a' quali si riferisce in essa il sole nel corso di una intera rivoluzione della terra, dicesi *eclittica*. Laonde l'orbita della terra è sempre nel piano dell' eclittica, e questa è un cerchio massimo della sfera celeste, potendo noi considerare come quantità infinitesimale il grande asse dell' orbita della terra, rispetto all' infinita distanza alla quale le stelle fisse trovansi da noi.

110. Intanto, osservando ogni giorno l' altezza meridiana del sole da qualunque sito della superficie terrestre, o sia sopra qualunque orizzonte, si nota che ne' soli giorni 21 marzo e 23 settembre ha un'altezza eguale a quella dell'equatore; che ne' giorni dal 21 marzo al 23 settembre ne ha una maggiore se si osserva da un luogo dell' emisfero boreale, ed una minore se si osserva da un luogo dell' emisfero australe; e viceversa pe' giorni che decorrono dal 23 settembre al 21 marzo. E che la massima differenza tra l' altezza del sole e quella dello equatore avviene ne' giorni 22 giugno e 22 dicembre per 23° 28′ o più precisamente per 23° 27′ 57″, declinazione del sole in que' due giorni; perciocchè essa è sempre eguale alla differenza positiva tra l'altezza meridiana del sole e quella dell' equatore. Per la qual cosa dobbiamo conchiudere che

ne' giorni 21 marzo e 22 settembre il sole non ha declinazione, e quindi percorrendo esso in quei giorni l'equatore, l'arco diurno sarà eguale all'arco notturno; e poi uscendo dal piano dell'equatore per esempio il 21 marzo va di mano in mano acquistando declinazione, finchè giunto alla massima nell'emisfero boreale il dì 22 giugno, comincia nuovamente a diminuirne sino al 23 settembre; dopo il quale giorno, uscendo dal piano dell'equatore comincerà ad acquistare declinazione australe, fino al 22 dicembre nel quale raggiungerà la massima, e ritornerà quindi a diminuirne fino al giorno 21 marzo, donde lo abbiamo supposto muovere da principio.

111. Da ciò è derivato che i due giorni 21 marzo e 23 settembre diconsi *giorni degli equinozî*, alludendo a che in allora l'arco diurno è uguale all'arco notturno (108); e i due giorni de' 22 giugno e 22 dicembre *giorni de' solstizî*, perchè a tali epoche il sole cessa di aumentare di declinazione (91 e 108), e sembra per qualche tempo serbare la stessa, prima di cominciarne a diminuire; ed è perciò che a quelle due epoche si hanno più giorni e più notti di seguito della stessa durata.

112. Dalle premesse cose è chiaro che volendo rappresentare l'eclittica come cerchio massimo della sfera celeste, n'è mestieri immaginarlo che si tagli coll'equatore sotto un angolo di 23° 27′ 57″, e siccome, adattandoci al linguaggio comune, attribuiremo queste apparenze a moto effettivo del sole, così ancora chiameremo l'eclittica *orbita del sole,* ed essa avrà i poli sulle circonferenze de' cerchi polari (91).

113. Questo cerchio adunque sarà diviso dall'equatore in due parti eguali, delle quali diremo parte *settentrionale* quella ch'è nell'emisfero boreale dell'equatore, e parte meridionale l'altra che rimane nell'emisfero australe. Ciascuna di queste due è divisa in sei parti eguali, e per conseguenza di gradi 30 ognuna, dette *segni*, in guisachè ciascuno è la dodicesima parte dell'eclittica; ed allorquando il sole si troverà corrispondere ad uno di essi, si dirà essere nel tale segno; e percorrendo esso ogni giorno quasi un grado della eclittica, si tratterrà in ciascuno de' dodici segni per circa un mese.

114. Quel punto d' intersecazione dell' equatore con l'eclittica dal quale il sole passa nell' emisfero boreale dicesi *principio di ariete* e *sezione di primavera*, perocchè trovandosi il sole in esso finisce l'inverno e comincia la primavera pe' luoghi situati nell' emisfero boreale. Da tal punto cominciansi ancora a contare i segni tutti e dodici di seguito da occidente in oriente. E l'altro punto d' intersecazione dell' equatore con l' eclittica chiamasi principio di *libra* e *sezione autunnale* perchè giuntovi il sole avviene l'equinozio d'autunno, e finisce l'estate per l'emisfero boreale. In modo che i due punti in cui la declinazione del sole è zero, e gli altri due ne' quali è massima indicano gl' intervalli dell' anno che distinguonsi col nome di *stagioni*. Dicesi *primavera* il tempo che il sole impiega dall' avere zero declinazione fino a che ne acquisti la massima nell' emisfero boreale; *estate*, il tempo che impiega da questo punto fino ad aver nuovamente zero declinazione nel punto opposto a quello in cui comincia la primavera; *autunno*, il tempo che scorre da questo punto fino a che giunge alla massima declinazione nell' emisfero australe; ed *inverno* finalmente, il tempo che da questo punto il sole impiega per ritornare a zero declinazione nel punto donde lo abbiamo supposto partire.

115. La distanza che un astro ha dal piano dell'eclittica dicesi *latitudine* dell'astro, ed in conseguenza diconsi *cerchi di latitudine celeste* tutti que' cerchi massimi che passano pe' poli dell' eclittica, i quali per l' intersecazione di questa con l'equatore staranno 23° 27′ 57″ distanti da quelli dell'equatore, che in preferenza si addimandano *poli del mondo*. L' arco di eclittica poi intercetto tra il principio di ariete ed il cerchio di latitudine che passa per l'astro, contato da occidente in oriente, si denomina *longitudine* dell'astro. E perciò la posizione di un astro può indicarsi in due modi diversi, cioè con due archi coordinati all' equatore che sono declinazione ed ascensione retta; o con due archi coordinati all' eclittica, che sono latitudine e longitudine.

Se però le stelle fisse non cambiano di latitudine, non avviene lo stesso pe' pianeti, i quali ne cambiano continuamente comechè in limiti assai ristretti, dall'uno e dall' altro lato dell' eclittica. S'immaginò quindi una fascia sferica detta *zodiaco*, con la quale si vollero anticamente

comprendere tutte le orbite de' pianeti allora conosciuti, e fu stabilita di circa 18°, avente nel mezzo l'eclittica.

116. Gli antichi astronomi divisero in dodici costellazioni tutte le stelle intorno all'eclittica e nella regione dello zodiaco, cui imposero de' nomi per lo più di animali, e per tale ragione da *zoon* che in greco significa animale, lo denominarono zodiaco, e a ciascuna costellazione assegnarono lo spazio di 30°, indicandola con un segno particolare per cui furono ancora dette i *dodici segni dello zodiaco:* essi sono i seguenti

Primavera.

1.° Ariete ♈ ed allorchè il sole è in esso dicesi 0°
2.° Toro ♉ 1
3.° Gemelli ♊ 2

Estate.

4.° Cancro ♋ 3
5.° Lione ♌ 4
6.° Vergine ♍ 5

Autunno.

7.° Libra ♎ 6
8.° Scorpione ♏ 7
9.° Sagittario ♐ 8

Inverno.

10.° Capricorno ♑ 9
11.° Aquario ♒ 10
12.° Pesci ♓ 11

Per meglio aiutare la memoria furono compresi questi dodici nomi in due versi latini, ne' quali si riportano secondo il loro ordine progressivo,

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

117. Il fenomeno intanto pel quale diciamo esser il sole nel tale o nel tal altro segno altra cosa non è che il movimento di traslazione della terra nella sua orbita, e per effetto di esso vediamo corrispondere il sole successivamente alle costellazioni di *ariete, toro, gemelli* ec., quando la terra in vece, per rispetto al sole, corrisponde a quelle di *libra, scorpione, sagittario* ec. Ed il fenomeno avviene nello stesso senso della realtà della cosa, da occidente in oriente, perocchè l'intersecazione comune di tutte le visuali dirette al sole per rapporto alle stelle fisse è appunto il centro del sole. Ma non può dirsi altrettanto delle apparenze cagionate dal moto di rotazione della terra, per lo quale il vertice comune di tutte le distanze angolari alle quali ne si mostrano gli astri, trovasi sempre sull'asse della rotazione (38), e quindi giusto perchè la terra gira da occidente in oriente il fenomeno avviene in senso opposto, e ne appariscono gli astri tutti girare da oriente in occidente in 24 ore (103).

Or per l'intersecazione dell'eclittica con l'equatore, volendo riferire il passaggio successivo de' meridiani innanti al sole (103) ad un punto determinato, si è scelto quello della sezione di ariete; la quantità si esprime in tempo o in gradi (104) e si denomina ascensione retta.

Dicesi adunque *ascensione retta* di un astro l'arco di equatore celeste interposto tra il principio di ariete ed il cerchio di declinazione che passa per l'astro, ed è contata come la longitudine da occidente in oriente.

Dicesi poi *ascensione obliqua* l'arco di equatore interposto tra il principio di ariete ed il punto dell'equatore che sorge o tramonta insieme con l'astro.

Finalmente per fissare in certo modo l'idea di quanto si riferisce all'apparente moto annuo del sole diciamo che il sole entra in ♈ all'istante dell'equinozio di primavera in cui la sua longitudine, la sua declinazione e la sua ascensione retta sono 0°; entra in ♉ circa un mese dopo avendo 30° di longitudine; in ♊ allorchè ha 60° di longitudine, ed in ♋ quando ne ha 90°; cioè al solstizio di estate: e così continuando per gli altri segni. L'epoca del passaggio del sole da un segno all'altro è dal 19 al 23 di ciascuno dei dodici mesi cominciando da marzo; poichè variando di continuo la velocità della terra che al sole si attribuisce, non può esservi un andamento costante.

118. Quando presso gli antichi furono imposti alle costellazioni dello zodiaco i nomi già indicati, corrispondevano questi alle faccende pubbliche della loro società, secondo le diverse stagioni. Ed all'epoca d'Ipparco cioè 150 anni prima dell'era cristiana coincidevano co' dodici segni dell'eclittica, o piuttosto erano la medesima cosa, perocchè a zero di ariete avveniva l'equinozio di primavera; ma avendo le stelle fisse un movimento di 50″ da occidente in oriente derivante dalla precessione degli equinozî (51), oggi non più si avvera l'equinozio allorquando il sole corrisponde a zero della effettiva costellazione di ariete, ma circa un segno prima, per cui, essendosi ritenuto il linguaggio e il segno di dinotare il punto equinoziale di primavera con ♈, siegue di necessità l'avvertire che oggi con la parola *segno* dell'eclittica non più s'intende la costellazione effettiva, ma si vuole indicare lo spazio di 30° in arco di eclittica a contare dal punto dell'equinozio di primavera: così 2 segni e 20° dinotano 80° di longitudine, e non già che il sole si trovi effettivamente a 20° di gemelli.

Se inoltre si considera la distanza angolare della terra o di un pianeta qualunque dal suo perielio, veduta dal centro del sole, dicesi *anomalia vera.*

Se si considera un astro fittizio che descriva uniformemente una circonferenza di cerchio avente per centro quello del sole, in guisa da trovarsi sempre sulla congiungente dell'afelio col perielio, detta *linea degli apsidi*, insieme col pianeta vero; l'angolo fatto al centro del sole dalle due rette menate al perielio ed all'astro fittizio, dicesi *anomalia media.*

E finalmente, per *anomalia eccentrica* s'intende la distanza perielia di un astro che descrivesse un cerchio circoscritto all'orbita ellittica, conservando sempre la stessa ascissa del pianeta effettivo nella sua orbita.

PARTE SECONDA

NAVIGAZIONE PER ISTIMA.



LEZIONE XI.

Descrizione ed uso del Loche.

119. Se fin da quando la navigazione cominciò ad acquistare una tal quale importanza fu sentito il bisogno di conoscere quanto si fosse discosto il bastimento dal lido, divenne poi per gli ulteriori e continui suoi sviluppi di assoluta e primordiale necessità il misurare quanto più precisamente fosse possibile il cammino della nave, onde così venire a capo della quantità avanzata verso nord o sud, e verso est o ovest, e quindi essere in grado di conchiudere, in qualunque ora si voglia, il punto dell'arrivo della nave sulla superficie del mare. Infatti, navigando per nord o per sud il numero delle miglia percorse ne dinoterà la differenza di latitudine; navigando per est o per ovest ne indicherà l'allontanamento dal meridiano di partenza, che suole denominarsi ancora *appartamento;* e navigando in fine per un altro rombo qualunque, la distanza seguita ci darà l'ipotenusa di un triangolo rettilineo rettangolo i due cateti del quale saranno la differenza di latitudine e l'appartamento: cioè saranno le due coordinate del punto di arrivo, rispetto al parallelo ed al meridiano del luogo della partenza.

Essendo dunque indispensabile saper misurare il cammino della nave, e tutti i mezzi fin oggi all'uopo usati supponendo un punto fisso sulla instabile superficie del mare, siegue che, quantunque la sarà vaga ed inesatta, dovrà formar sempre l'oggetto principale delle nostre cure.

Di tutti i mezzi intanto che sonosi finora a questo fine inventati il più ricevuto e generalmente adottato è quello del *loche,* il quale si compone della *barchetta*, del *cordino* e del *molinello.*

120. La *barchetta del loche* è un pezzo di legno della grossezza di mezzo pollice circa, e della figura per lo più di un triangolo isoscele

o di un settore circolare di 6 a 7 pollici di lato. La base del triangolo o la corda dell' arco suol essère alquanto minore de' lati, ed avente al lembo in tutta la sua estensione una laminetta di piombo di presso a $\frac{8}{10}$ del peso specifico del legno, onde questa faccia di tanto immergere verticalmente la barchetta nell' acqua per quanto quasi interamente vi si nasconda, e resti coperta dall' azione del vento.

A' due angoli alla base son praticati due fori nel senso della grossezza: per uno di essi passa un cordino di circa cinque piedi di lunghezza, ed avente un *piede di pollo* all' estremità posteriore, onde non poterne sfuggire. All' estremità anteriore di esso s' *impiomba* un cavicchio da introdursi nell' altro foro allorchè vuolsi misurare il cammino, ma in guisa che ad una forte scossa ne scappi; affinchè, cessato l'esperimento, la superficie della barchetta lasci la posizione perpendicolare al cammino, e prendendo la parallela possa faciimente essere a bordo ritirata.

121. Al *doppino* di questo cordino, che prendesi rimanendo alquanto più corto il lato del cavicchio, vien ligato un lungo cordino di circa 70 passi, chiamato *cordino del loche;* e su di esso prendesi prima la lunghezza della nave, ponendovi un sufficiente pezzo di cuoio, che possa ben distinguersi ancora di notte; indi ad ogni 45 piedi si pone un pezzetto di *forese*, portante il primo un nodo, il secondo 2 nodi, il terzo 3 nodi ec. ed alla metà tra un nodo e l' altro, per maggior comodo, un pezzetto di cuoio per indicare i $\frac{5}{10}$. Tutto questo cordino viene avvolto al menzionato *molinello*, onde agevolmente cederlo nello scandagliare il cammino della nave.

122. Per fare uso del loche, dopo aver *colio* una discreta quantità di cordino messa pendente a *colli* dalla mano, si getta la barchetta in mare di poppa e da sottovento, onde più sollecitamente esca dalla scia che le comunicherebbe un moto dannoso all' esperimento; ed è perciò che prima di cominciare a valutar il tempo dovuto allo scorrere della regolare divisione del cordino di 45 in 45 piedi, si lascia allontanar la barchetta dal bastimento di tutta la lunghezza di esso.

All' istante che il pezzo di cuoio che la indica giunge tra le mani dell'osservatore, questi darà la voce *torna* ad un marinaro che avrà in

mano un'ampolletta a polvere di 30″, il quale la volterà con la parte, vuota al di sotto, ed allorquando vedrà scorsa tutta l'arena, dirà *stop;* e si porrà fine all'esperimento, durante il quale si avrà cura di cedere dal rocchetto il cordino a misura che la nave cammina, evitando per quanto è possibile, così la sua soverchia catenaria, come la resistenza derivante dall'attrito del rocchetto.

123. La misura del cammino così ottenuta durante 30″ o sia la 120ª parte dell'ora ci mena a conchiudere che in un'ora farà la nave tanto cammino per quanto è il cordino scorso moltiplicato per 120: o ciò ch'è lo stesso, se i 45 piedi della distanza da un nodo all'altro corrispondessero alla 120ª parte del miglio, si percorrerebbero in un'ora tante miglia quanti sono i nodi scorsi. Ma siccome la lunghezza di un grado, desunta dalla 90ª parte del quadrante del meridiano terrestre è di 57030 tese (34), e quindi il miglio di 5703 piedi, così la 120ª parte è piedi 47 $\frac{1}{2}$ e non già 45. Noi però, ad onta di questo ragionamento, ci serviremo della lunghezza di 45 piedi e non dell'altra di 47 $\frac{1}{2}$, avendo l'esperienza dimostrato esser quella più adatta al conseguimento del nostro scopo. Sia che la barchetta non cessi mai dal partecipare al moto della nave, sia che il cordino soffra qualche attrito malgrado tutte le precauzioni, sia che il movimento della scia agendo sul cordino tenda a ravvicinarne la barchetta, e che tutte queste cagioni di scandaglio in meno non vengano sufficientemente compensate dalla catenaria del cordino che dà un errore di scandaglio in più; o anche dipenda ciò da qualunque altra ragione da attribuirsi ai movimenti particolari e poco noti del mare, si è dovuta abbandonare del tutto la divisione per piedi 47 $\frac{1}{2}$, onde non trovare costantemente di aver fatto più cammino di quanto si desume dagli scandagli presi col loche. Tanto più che al navigante giova meglio stimare maggiore che minore il cammino percorso, onde più a tempo premunirsi contra qualunque evento.

124. È d'uopo intanto avvertire che essendo sì il cordino che l'ampolletta alterabili secondo il diverso stato igrometrico dell'atmosfera, e per diverse circostanze fortuite, bisognerà da quando a quando verificarli, essendochè molti e gravi errori possono derivarne.

Per la verifica del cordino ci basterà ricorrere alla detta misura di piedi 45, che suole tenersi segnata tutta per disteso sulla coverta della nave. Ma in quanto alla verifica dell' ampolletta ne è mestieri ricorrere o ad una mostra a *secondi morti,* o pure al pendolo. Questo dev'essere della lunghezza di pollici 9.2 $\frac{1}{7}$ di piede di Francia dalla sua origine sino al centro della palla di piombo da moschetto, che per lo più a tale oggetto si adopera, sospendendola mercè un filo di seta bene incerato alla fessura praticata a bella posta in una riga. Halley trovò con l'esperienza che la lunghezza del pendolo per segnare i minuti secondi esser deve di pollici inglesi $39 \frac{2}{10}$; ed a noi basterebbe contar 30 oscillazioni di un tal pendolo per aver la durata conveniente all'ampolletta di 30″. Ma essendo esso alquanto incomodo per la sua lunghezza, ed offerendo poca guarentigia il novero di 30 oscillazioni, così avvalendoci della conoscenza, che le oscillazioni de' pendoli sono nella ragione delle radici quadrate delle loro lunghezze, faremo $1' : 30'' :: 1 : \frac{1}{2} :: \sqrt{39 \frac{2}{10}} : \sqrt{x} = \sqrt{9 \frac{8}{10}}$ di piede inglese, o sia pollici 9, linee 2 $\frac{1}{7}$ di piede di Francia. E 60 oscillazioni di questo piccolo pendolo avranno la metà della durata delle 60 oscillazioni del pendolo di Halley, e quindi si compiranno in 30″ di tempo.

125. Nel caso però siasi già percorsa una quantità di cammino allorquando si avverte un errore nel cordino o nell' ampolletta, o in entrambi, dovrà non solo attendersi alla rettifica di esso, ma bensì correggere il cammino fino allora stimato. E ciò si otterrà mediante un quarto proporzionale, con le ordinarie regole dell' aritmetica; cioè, per l' ampolletta si dirà: più durata, più cammino crederemo aver fatto, e quindi l' errore su di esso sarà in ragione diretta dell' errore dell' ampollina; e pel cordino: più distanza fra' nodi, meno cammino stimeremo aver fatto, laonde l' errore sarà in ragione inversa di quello della distanza fra' nodi. E quando fossero trovate erronee l' ampolletta e la divisione del cordino, l' errore sul cammino sarà in ragion composta di quelli dell' una e dell' altra. Cioè: il cammino erroneo sta al cammino vero in ragion composta della durata dell' ampolletta erronea alla durata dell' ampolletta vera; e del numero di piedi 45 che costituiscono la distanza vera di ciascun nodo del cordino, al numero de' piedi contenuti nella lunghezza erronea di esso fra due nodi consecutivi.

Così chiamando a il cammino erroneo, m la durata dell'ampolletta erronea, n il numero de' piedi contenuti nella divisione erronea del cordino, ed x il cammino vero, si avrà

per l'errore sull'ampolletta $m : 30'' :: a : x = \frac{a \times 30}{m}$

per l'errore sul cordino $45 : n :: a : x = \frac{a \times n}{45}$

per l'errore su di entrambi $a : x :: \begin{Bmatrix} m : 30 \\ 45 : n \end{Bmatrix}$

$$a : x :: m \times 45 : n \times 30$$

$$x = \frac{a \times n \times 30}{m \times 45} = \tfrac{2}{3}\, a \times \frac{n}{m};$$

cioè, il cammino vero è uguale a $\frac{2}{3}$ del cammino erroneo moltiplicato per la partizione erronea del cordino, divisa per l'ampolletta erronea.

Esempi del 1.° caso.

Dopo aver valutato col loche 74 miglia di cammino fatto da un vascello, si è avvertito esser l'ampolletta di soli 28''; si domanda quante miglia si sono realmente percorse.

$$x = \frac{a \times 30}{m} = \frac{74 \times 30}{28} = 79{,}3$$

Avendo già notate sopra un bastimento 74 miglia di cammino, si è osservato esser di 32'' la durata dell'ampolletta; si chiede il numero delle miglia effettivamente percorse.

$$x = \frac{a \times 30''}{m} = \frac{74 \times 30}{32} = 69{,}4$$

Esempi del 2.° caso.

Sonosi scandagliate miglia 8,5 con un loche che ha piedi 43,3 di distanza media in fra' nodi; si domanda qual'è il cammino da notare.

$$x = \frac{a \times n}{45} = \frac{8{,}5 \times 43{,}3}{45} = 8{,}2$$

Dopo fatte 85 miglia di cammino, secondo gli scandagli del loche, si è scorto esser di piedi 46,3 la distanza media fra' nodi del cordino; si domanda il cammino vero.

$$x = \frac{a \times n}{45} = \frac{85 \times 46{,}3}{45} = 87{,}5$$

Esempi del 3.° caso.

Si sono stimate miglia 96 di cammino, con un cordino che fra' nodi aveva per distanza media piedi 46, e con un'ampolletta di 31'',5; si domanda il cammino vero.

$$x = \tfrac{2}{3}\, a \times \frac{n}{m} = 64 \times \frac{46}{31{,}5} = 93{,}5$$

Si è riconosciuta di 27'',5 l'ampolletta, e di piedi 47,4 la lunghezza media del cordino da un nodo all'altro; si domanda la vera distanza percorsa, mentre la era stimata di miglia 96.

$$x = \tfrac{2}{3}\, a \times \frac{n}{m} = 64 \times \frac{47{,}4}{27{,}5} = 110{,}3.$$

LEZIONE XII.

Della Bussola.

126. La conoscenza del cammino della nave sarebbe pressochè inutile se il mezzo ne mancasse di determinare in qual direzione esso è seguito, o sia se non potesse fissarsi almeno con sufficiente approssimazione l'azimutto della distanza percorsa. A tal fine era d'uopo non solo rappresentare l'orizzonte con un cerchio di maneggevole grandezza al cui centro l'osservatore dovrà sempre supporre di essere, del pari ch' esso effettivamente trovasi al centro del proprio orizzonte; ma doveva ancora potersi avere una relazione costante di un punto qualunque della circonferenza di tal cerchio co' punti cardinali. E siccome la pietra calamita tra le altre sue singolari proprietà ha quella di poter dirigere costantemente due suoi punti alle stesse parti dell' orizzonte, quando è liberamente sospesa; e inoltre di attrarre a se il ferro e comunicargli ancora tutte le sue virtù, mediante una semplicissima operazione; così non poteva darsi cosa più atta al conseguimento del nostro scopo.

127. Verso la fine del secolo XIII il pilota amalfitano Flavio Gioia, comecchè già da gran tempo fossero note le proprietà della calamita, ed in certo modo applicata ancora si fosse agli usi della nautica, pure fu il primo a darle tal comoda sospensione, quasi come presentemente abbiamo, onde potè divenire di uso facile e generale; situando un ago di acciaio calamitato in equilibrio su di un perno, ed adattandovi nella parte superiore un cartone di figura circolare, su del quale erano disegnate le direzioni de' venti.

Questo prezioso istrumento ha in seguito preso il nome di *bussola*, e ricevuto de' continui miglioramenti; e noi oggidì ne distinguiamo di cinque specie principali, *compasso di rotta*, *compasso di variazione*, *compasso azzimuttale, declinatorio* ed *inclinatorio;* ma non descriveremo quì che i soli primi, tralasciando i due ultimi siccome quelli che non sono di uso comune nella navigazione.

128. *Del compasso di rotta.* I marini dicono *compasso di rotta* la bussola di cui si servono per dirigere la prua secondo loro meglio con-

viene. Essa consiste principalmente in un ago di acciaio al quale siansi prima comunicate le virtù della calamita, detto *ago calamitato*. Questo si fissa ad un cerchio di cartone o di talco, il quale dalla parte opposta all'ago viene diviso, mercè due diametri ad angolo retto, nei suoi quattro quadranti, facendo corrispondere perfettamente uno di tali diametri nella direzione dell'ago, ed a quello de' suoi estremi che si dirige verso il nord, quantunque non precisamente, si pone per distinzione la lettera N, aggiungendovi ancora un giglio o una stella per renderlo più appariscente, e all'altro estremo la lettera S con la quale si vuole intendere sud; come con le lettere E ed O poste convenevolmente agli estremi dell'altro diametro vuolsi intendere est ed ovest. Così il piccolo cerchio che deve rappresentare l'orizzonte dell'uomo di mare rimane diviso secondo i quattro punti cardinali.

Ma non potendo questa prima divisione bastare ai bisogni della navigazione, si divide ciascun quadrante ne' suoi 90° e talvolta ancora in mezzi gradi cominciando dal nord e dal sud verso l'est e verso l'ovest; ed oltre a ciò vi si disegna la così detta *rosa nautica*, la quale consiste nel suddividere ogni quadrante in otto rombi.

129. *Della partizione della rosa nautica*. Si denomina *rombo* o *area di vento* un azzimutto qualunque, e perciò ancora l'angolo che la direzione della nave fa col meridiano, e che a rigore dovrebbe scriversi in gradi. Intanto, essendo di gran comodo e di uso generale il servirsi della rosa nautica, ecco come essa si ripartisce:

1.° Si segnano sul cerchio di cartone i quattro punti N. S, E. O. nel modo anzidetto; e si appellano venti cardinali, perchè sopra ciascun orizzonte la linea E. ed O. rappresenta la comune sezione fattavi dall'equatore, e l'altra N. e S. quella dal meridiano. Ma avendo noi denominati nord e sud del pari i poli del mondo, che comunque nello stesso piano del meridiano, sono però quasi sempre in altezza e dallo orizzonte discosti, così per rendere nell'idea i quattro punti cardinali inamovibili dal piano dell'orizzonte, li considereremo come indicati dal primo verticale, dicendo esser i punti E. ed O. gli estremi della sua comune sezione con l'orizzonte, e i punti N. e S. i suoi poli.

2.° Ogni quadrante si divide per metà, ed il nome delle quattro

divisioni si forma dalla riunione de' due nomi estremi del quadrante nel quale si trova, anteponendo quello ch'è nel piano del meridiano; quindi diconsi NE, SE, SO, NO e con nome collettivo *venti laterali.*

3.° Si dividono ancora per metà questi 8 archi, ed a' punti di divisione si dà parimenti il nome particolare nascente da' due nomi di vento cardinale e vento laterale tra' quali è messo, con anteporre il primo; indi il nome generale di *mezzi venti*. Essi adunque sono NNE, ENE, SSE, ESE, SSO, OSO, NNO ed ONO.

4.° In fine gli 8 mezzi venti si dividono ancora in parti eguali e si avranno 16 quarti di venti che si denominano dal vento cardinale o laterale cui sono d'appresso, portante la designazione $\frac{1}{4}$ dell'altro verso cui declinano, così dicesi N $\frac{1}{4}$ NE il rombo vicino al Nord che devia di $\frac{1}{4}$ al NE; e similmente NE $\frac{1}{4}$ N quello ch'è vicino al NE e devia di $\frac{1}{4}$ al Nord.

130. Divisa in questo modo la rosa nautica in 32 rombi, cioè i 4 quadranti in 8 rombi ciascuno, troveremo il cerchio diviso in 32 settori de' quali gli archi saranno di 11° 15′; ma siccome gli azzimutti devono tutti contarsi dal meridiano, così il secondo rombo lo diremo di 22° 30′, il terzo di 33° 45′, ec. in ogni quadrante. E per maggior comodo chiameremo *primo* quadrante quello dal nord all' est, *secondo* quello dal sud all' est, *terzo* quello dal sud all' ovest, e *quarto* quello dal nord all' ovest come più chiaramente rilevasi dal seguente quadro:

1.° Quadrante	*2.° Quadrante*	*3.° Quadrante*	*4.° Quadrante*	*Azzimutti*
Nord. . . .	Sud. . . .	Sud. . . .	Nord. . . .	0°. 0′
N $\frac{1}{4}$ NE. . .	S $\frac{1}{4}$ SE. . .	S $\frac{1}{4}$ SO . .	N $\frac{1}{4}$ NO. . .	11 . 15
NNE. . . .	SSE. . . .	SSO . . .	NNO. . . .	22 . 30
NE $\frac{1}{4}$ N. . .	SE $\frac{1}{4}$ S. . .	SO $\frac{1}{4}$ S . .	NO $\frac{1}{4}$ N. . .	33 . 45
NE	SE	SO. . . .	NO	45 . 00
NE $\frac{1}{4}$ E. . .	SE $\frac{1}{4}$ E . .	SO $\frac{1}{4}$ O . .	NO $\frac{1}{4}$ O. . .	56 . 15
ENE. . . .	ESE. . . .	OSO . . .	ONO. . . .	67 . 30
E $\frac{1}{4}$ NE. . .	E $\frac{1}{4}$ SE . .	O $\frac{1}{4}$ SO . .	O $\frac{1}{4}$ NO. . .	78 . 45
Est	Est	Ovest . . .	Ovest. . . .	90 . 00

Qui bisogna avvertire che se nella scrittura sogliamo preferire questi nomi di origine straniera per la comodità che offrono con le loro iniziali tutte diverse, nel linguaggio parlato però si fa uso dalla gente di mare de' nomi italiani, pe' quali basterà menzionare quelli de' venti cardinali e laterali, essendo il meccanismo della derivazione degli altri nomi lo stesso di quello già esposto:

Nord . . *Tramontana*	NE . . . *Greco*
Sud. . . *Mezzogiorno*	SE . . . *Scirocco*
Est . . . *Levante*	SO . . . *Libeccio*
Ovest . . *Ponente*	NO . . . *Maestro*

Le 32 divisioni però che la rosa nautica ne offre non essendo sufficiente a' bisogni della navigazione, come si è già detto; per indicare gli azzimutti con la debita precisione siamo spesso obbligati aggiugnere de' gradi a' rombi, come a modo d'esempio SE $\frac{1}{4}$ E 4° 15′ Sud, che più spedita cosa sarebbe l'indicare con l'espressione S 52° E.

131. *Della declinazione dell'ago e distinzione delle rose semplice e doppia.* L'ago dopo essere stato calamitato ed aver ricevuto una libera sospensione non dirige l'estremo N. precisamente al nord, o ciò ch'è lo stesso, non rimane perfettamente nel piano del meridiano del luogo, chè, così essendo, ben facil cosa sarebbe il trovare sulla rosa l'azzimutto della direzione dalla nave seguito; ma siccome in ogni luogo prende una direzione particolare, che chiamasi *meridiano magnetico* il quale fa angolo col meridiano del luogo, così n'è mestieri tener conto di tal deviazione, e questa si denomina *declinazione dell'ago.* Essa potendosi determinare per mezzo di osservazioni astronomiche, come in seguito diremo, potrà esser valutata sia nel dovere intraprendere una rotta qualunque, sia nel determinare la direzione del cammino già fatto.

Ad evitare però questi calcoli sogliono alcuni, principalmente nel mediterraneo, usare le *rose doppie;* quindi è venuta la distinzione di *bussola scorretta* e *bussola corretta.* La bussola scorretta è quella che ha la rosa come si è già descritta, navigando con la quale dovrà in ogni rotta tenersi conto della declinazione dell'ago. La bussola corretta poi è

quella che ha la rosa doppia, per la quale, compensata la declinazione dell'ago, non è necessaria l'anzidetta correzione. La rosa doppia consiste nel soprapporre una rosa mobile intorno al suo centro, al di sopra del cartone circolare, il quale in tal caso porta per lo più la sola graduazione nella parte superiore, ed è attaccato all'ago dalla sua parte inferiore, in guisa che deve di necessità seguirne l'andamento. Con la rosa de' venti intanto, ch'è libera, si compensa la declinazione dell'ago, e si naviga per qualche giorno come il meridiano magnetico si confondesse col meridiano del luogo.

132. *Forma e sospensione dell' ago.* La figura che suol darsi allo ago di acciaio da calamitarsi per uso della bussola di mare è per lo più quella di una righetta rettangolare con un foro in mezzo, o quella di un rombo vuoto; e si preferisce l'acciaio, avvegnachè se il ferro più facilmente può esser calamitato, ritiene però assai meno il magnetismo.
Al centro della rosa intanto, facendo nella parte inferiore del cartone corrispondere il foro dell'ago, si fissa un *cappelletto* di ottone e di figura pressochè conica col vertice di pietra dura. Indi si sospende sopra un perno di ottone con la punta di acciaio bene acuminata, il quale sorge perpendicolarmente dal centro del fondo di una cassettina cilindrica o sferica di legno o di rame, ov'è fissato con vite, acciò facilmente si possa togliere quando abbisogna di accomodo: tal sospensione rende la rosa ed il suo ago atti a girare liberamente da tutti i lati in senso orizzontale; ed il cappelletto contribuisce alla stabilità della loro posizione. Questa cassettina si covre poi con un cristallo, ed infine viene sospesa alla cardanica in un'altra di figura parallelepipeda: l'esser mobile su due diametri che si tagliano ad angolo retto la rende atta a tener la rosa sempre in posizione orizzontale, ad onta del tangaggio e del rollio della nave. Finalmente il fondo della cassettina cilindrica si dipinge per difenderla dall'ossidazione, e si preferisce il color bianco, onde meglio si distinguano le linee nere che vi si tracciano perpendicolarmente alla base, ed alla distanza angolare di 90° l'una dall'altra rispetto al centro.

133. *Situazione del compasso di rotte.* Un piccolo armadio detto *chiesola*, a bella posta costruito, e posto a prora via del timoniere

serve a contenere il compasso di rotta; e per debitamente situarvelo si prendono a guida le menzionate lineette nere; dovendo risultare la congiungente di due di esse diametralmente opposte, parallela alla chiglia con tutta esattezza, affinchè rapportando la lineetta proriera ad uno de' rombi della rosa, valga lo stesso che avervi rapportata la chiglia della nave. Ed acciocchè la rosa e tal lineetta possa ancora di notte ben distinguersi si situa nella chiesola acconciamente una lampada con rifflettoi argentati.

Da parecchi anni però il compasso di rotta e la sua situazione hanno avuto de' miglioramenti su' legni da guerra della marina francese: la rosa ha pollici 9 $\frac{1}{2}$ di diametro, è impressa sopra carta finissima, ed incollata così sopra che sotto di un foglio di talco: la cassettina cilindrica nella quale è sospesa ha il fondo di lastra di cristallo, ed il perno che vi sostiene la rosa appoggiasi ad una traversa di rame adatta all'uopo; indi è convenevolmente sospesa alla cardanica nell'altra di figura parallellepipeda, dalla quale si toglie la base allorchè è posta in opera. Così condizionato il compasso di rotta, s'incastra nella grossezza della *coverta* del cassero al luogo ov'era prima la chiesola, e vi si pratica sul cassero una copertura parallellepipeda a lastre di cristallo, onde potervisi guardare da tutti i lati; finalmente per guarentire il tutto dall'urto delle manovre evvi praticata un'elegante cappa levatoia.

Una lampada situata in batteria basta ad illuminare il compasso di rotta di sopravento e quello di sottovento, mediante un foro quadrangolare di 6 pollici di lato, praticato nella spessezza del ponte, e dei riflettoi bene argentati, situati in modo da far riflettere la luce sulla rosa superiore.

I vantaggi che offre questa situazione del compasso di rotta sono: 1.° averne potuto ingrandire il diametro; 2.° potersi vedere dalla batteria, e sul cassero da tutti i lati; 3.° di prendere meno altezza sul cassero, e quindi meno imbarazzar le manovre; 4.° di tener nascosto in tempo di notte il lume; 5.° non essere esposto in combattimento al fuoco del nemico; 6.° finalmente di avere il grandissimo pregio di potersi comodamente riaccendere la lampada, allorchè per una circostanza qualunque siasi spenta. E tutto ciò oltre all'economia in rapporto alla spesa delle chiesole; e oltre al risparmio perenne in quanto al numero delle lampade che giornalmente si accendono.

134. *Del compasso azzimuttale.* Ne rimane ora a dire del compasso di variazione e del compasso azzimuttale, i quali siccome al presente per le cure dell' ingegnoso artista svedese *Schmalcalder*, oltre de' grandi miglioramenti arrecativi, sono divenuti la medesima cosa; così daremo la sola descrizione dello strumento di questo autore, siccome il più adatto alle osservazioni sopra mare, e siccome quello ch' è prescritto delle Reali ordinanze a bordo dei legni da guerra.

La costruzione di questo compasso di variazione ed azzimuttale, consiste in una bussola, come quella che dicesi compasso di rotte, eccetto l'essere alcune parti meglio condizionate. Sono poi sul lembo della cassettina cilindrica due traguardi stabilmente fissati, e per diametro: quello oggettivo è guernito dalla parte esterna, rispettivamente alla rosa, di uno specchio a cerniera, il quale è inoltre scorrevole lungo il traguardo: per modo che lo specchio è atto a prendere molte elevazioni ed inclinazioni, e quindi gli si fa riflettere l'immagine di un astro sul traguardo oculare; mentre con l' aiuto di opportuni vetri colorati, convenientemente disposti, si può ancora diminuire la vivezza de' raggi solari.

Presso il traguardo oculare trovasi applicato un prisma triangolare di cristallo, per mezzo del quale, essendo a sufficienza ingrandita la graduazione della rosa, il cui diametro per altro è quivi portato alla dimensione di pollici $9\frac{1}{2}$ di Francia, si possono comodamente distinguere le suddivisioni, le quali sono spinte fino a dare i 30'', mercè un picciol nonio fisso nell' interno della cassettina, poco discosto in altezza dal lembo della rosa, sotto di esso traguardo oculare, e con lo zero situato perpendicolarmente al di sotto del diametro che conduce dall'uno all' altro traguardo. Finalmente, dalla parte esterna della stessa cassettina cilindrica, è praticata una picciola molla, premendo la quale si arresta la rosa nell' istante del rilevamento, ed indi con tutto l' agio possibile si legge il vero punto di esso.

135. *Fenomeni della calamita.* Intanto, poichè la costruzione della bussola è fondata sulle singolari proprietà della calamita, sarà cosa utile indicarne le principali, e dare un breve cenno sul fluido magnetico, onde conoscere le fasi cui vanno soggette, e in certo modo persuaderci di fino a qual punto vi ci potremo affidare.

1.° La pietra calamita è una sostanza ferruginosa dotata delle singolari virtù già menzionate, le quali quantunque trovinsi generalmente cosparse in tutta la massa, non sono però con eguale intensità ripartite, ma con maggiore energia si esercitano in due punti opposti che sono precisamente quelli de' quali uno si dirige al nord e l'altro al sud, per cui diconsi egualmente polo nord e polo sud della pietra.

Per rinvenire questi due punti nella pietra, si porta su di essa un ago comune di acciaio, questo mentre ne sarà attratto da per tutto in su quella superficie, avrà però una diversa inclinazione su i diversi punti di essa: solo ad eguale distanza circa da' due poli prenderà una situazione parallela al piano della pietra, e quasi perpendicolare al meridiano magnetico; e ne' due poli si eleverà verticalmente.

E per maggiormente aumentare la forza magnetica in questi due punti che debbono servire a calamitare gli aghi, giacchè non è agevole di avvalerci delle pietre in mare, si suole applicarvi un apparecchio mercè il quale prende il nome di *calamita armata*. Ciò consiste in due laminette di acciaio poste a' due poli della pietra, e fermate ad essa con una fascetta di rame che la circonda.

Così essendo la pietra armata si procede a calamitare gli aghi di acciaio mediante tre o quattro stropicciamenti fatti dal centro in fuori, e sempre nello stesso senso, avvertendo però che negli aghi ove l'estremo da indicare il nord è preventivamente destinato, deve calamitarsi col polo sud della pietra il polo nord dell'ago, e col nord della pietra il sud dell'ago; giacchè la pietra nel comunicare all'ago la virtù direttiva gliela comunica in senso diametralmente opposto. E ciò è analogo alla costante esperienza, che poste più calamite a distanza non maggiore delle rispettive sfere di azione attrattiva, il sud dell'una attrae il nord dell'altra; ed in generale sempre i poli della stessa specie nelle calamite si respingono, ed al contrario si attraggono tra essi quelli di specie diverse; e ciò benanco a traverso di qualunque corpo solido o liquido che siasi.

Gli aghi possono ancora esser calamitati con migliore effetto mediante una *calamita artificiale*. Questa consiste in due spranghe di acciaio calamitate, i cui poli di diverso nome si comunicano il magnetismo per mezzo di due traverse di *ferro dolce*. Tale apparato riesce molto

più energico delle migliori calamite naturali; e quindi devesi preferire nel calamitar gli aghi delle bussole.

Per poter servire a così fatto uso la calamita artificiale bisogna che abbia le spranghe di acciaio circa il triplo della lunghezza dell'ago da calamitare, e per lo meno il doppio della larghezza, e poscia debbonsi disporre in linea retta una dopo l'altra, co' poli prossimi di diverso nome, separati solamente da un pezzetto di cartone o di legno sottile, la cui altezza sia inferiore a quella delle due spranghe. Indi, per calamitare l'ago basterà adattarlo per lunghezza sulle due spranghe, in guisa che la sua metà corrisponda al mezzo del piccolo spazio che è tra quelle, e poscia farlo scorrere in senso parallelo al piano delle due facce superiori di esse, con sufficiente pressione, e facendo giungere ciascuno degli estremi successivamente sino a presso la separazione delle spranghe, per dieci o dodici volte con ciascuna delle sue facce.

2.° Un ago di acciaio dopo essere stato calamitato, cessa di prendere la posizione orizzontale quando è liberamente sospeso pel suo centro di gravità, ma dalla parte del polo elevato inclina verso la terra: e questa inclinazione cresce a misura che la latitudine diviene maggiore, ed è soggetta a continui cambiamenti non solo nella stessa latitudine, ma ancora in un luogo medesimo, se si considerano due tempi diversi; e mentre in alcuni luoghi aumenta, in altri diminuisce. In guisa che in ciascun meridiano dovrà trovarsi un punto nel quale l'inclinazione magnetica è nulla. Ora immaginando una linea che passi per tutti così fatti punti si avrà la curva detta *equatore magnetico*, la quale, per quanto si è finora osservato, si taglia sempre sotto un angolo molto acuto con l'equatore terrestre.

Se questa linea senza inclinazione fosse un cerchio massimo della terra, sarebbe assai facile il determinarne la posizione col fare due osservazioni in due punti diversi, ma essendosi rinvenuti sull'equatore terrestre più di due punti ne' quali l'inclinazione dell'ago è zero, è d'uopo conchiudere che questa linea subisce differenti inflessioni; e però le sole e moltiplici esperienze potranno farla determinare.

Intanto noi nella navigazione avremo cura di porre qualche contrappeso alla rosa nautica, che, compensando l'inclinazione dell'ago, la faccia per ogni dove rimanere orizzontale.

3.° Semprechè si discosti l'ago dalla sua posizione naturale o sia dal piano del meridiano magnetico per una ragione qualunque, e poi si abbandoni di nuovo a se stesso, non riprenderà la sua primitiva posizione che dopo molte oscillazioni più o meno estese dall'una e dall'altra parte. Questo effetto della forza magnetica è analogo all'azione che la gravità esercita sulle oscillazioni del pendolo, per modo che noi potrem dire che le oscillazioni dell'ago saranno più o meno sollecite in ragione della intensità della forza magnetica, e prendere per sua misura il quadrato del numero delle oscillazioni fatte dall'ago in un dato tempo.

Per conseguenza, il rapporto dell'intensità delle forze magnetiche in due luoghi qualunque del globo sarà eguale a quello de' quadrati dei numeri di oscillazione del medesimo ago nella stessa durata. E M. de Humbolt ha trovato che posta uguale a 100 l'intensità della forza magnetica all'equatore, a Napoli sarà di 127; a Parigi di 134; ed a Berlino di 137.

4.° Allorchè la pietra calamita o l'ago calamitato è lasciato libero all'azione delle forze che lo sollecitano, in alcuni luoghi della terra, l'estremità nord dell'ago si discosta dal vero meridiano, come abbiamo di già riferito, deviando verso l'est, in altri verso l'ovest, ed in taluni punti coincide con la direzione del vero nord: anomalie cui abbiamo dato il nome di *declinazione*. Accurate e molto ripetute osservazioni han fatto rilevare che la declinazione lungi dall'esser costante in tutti i luoghi, subisce anzi nel punto medesimo de' cangiamenti poco uniformi, ed ora in un senso ora nell'altro. E tal continua deviazione dell'ago nello stesso punto si è chiamata *variazione*.

L'Osservatorio di Parigi e quello di Greenwich sonosi in certo modo occupati di rinvenire qualche norma da assegnare sul movimento dello ago calamitato. A Parigi si è avuto di risultamento che in generale la variazione cresce dal solstizio d'inverno all'equinozio di primavera, indi diminuisce sino al solstizio di estate, ed aumenta di nuovo da questo all'equinozio di autunno, per diminuire una seconda volta sino al solstizio di inverno. Si è pure conosciuto che l'effetto della variazione diurna è tale che l'ago avanza verso l'ovest dal sorgere del sole fino ad 1 ora dopo mezzodì, e retrocede nuovamente verso l'est fino al tramonto. Tal quantità diurna non è la stessa nè per tutti i mesi dell'anno nè per

tutti i luoghi: a Parigi era giunta a 14′ nel mese di giugno e fu la massima, ed il suo minimo avvenne in dicembre nella quantità di 9′; a Londra ne' mesi di giugno e luglio ascese la massima a 19′,7 e la minima in dicembre si limitò a 7′,6.

136. Oltre di quanto si è già esposto intorno alla variazione dello ago, diverse circostanze atmosferiche sensibilmente v'influiscono, ed in particolar modo quelle meteore luminose dette *aurore boreali*, principalmente nelle latitudini molto elevate; ma in generale queste variazioni diurne sono poco sensibili.

Se però passando da un luogo ad un altro la declinazione cambia di continuo, come abbiamo esposto, vi sono ancora molti luoghi in cui la declinazione è zero, e finora si sono osservate tre linee sul globo nelle quali tal fenomeno si verifica, e non si è mancato di tracciarle sopra alcuni mappamondi, ma esse ancora cangiano continuamente di figura e di sito. Una di esse passava nel 1666 per Parigi poscia si è man mano accostata all'ovest, ed oggi passa vicino Filadelfia ove appunto la declinazione dell'ago è zero; mentre a Parigi è giunta a circa 22° ovest.

La storia del magnetismo non è ancora inoltrata abbastanza per poter render conto di tutti i fenomeni che gli riguardano. Dal 1580 l'ago si è continuamente avanzato dall'est all'ovest sino a che nel 1819 giunse a 22° 29′, dalla quale epoca è divenuta retrograda, come continua ai giorni nostri. Ma da qual punto essa partì? Ove si arresterà? Quali saranno per un dato luogo il massimo ed il minimo di declinazione? Nessuna delle teoriche conosciute sarebbe sufficiente per risolvere una sola di tali quistioni, e però fa d'uopo contentarci di poter calcolare la declinazione dell'ago nel giorno che ne occorre.

Finalmente, come avvertenza, è buono riferire un fenomeno che deve richiamare l'attenzione dell'uomo di mare: Una forte scarica di elettricismo a bordo di un bastimento genovese che dalle vicinanze di Algieri dirigeva per Marsiglia, produsse sull'ago calamitato una inversione nella virtù direttiva dell'ago, quantunque la bussola non ne avesse punto sofferto; e così divenuto nord il polo sud e viceversa, il pilota andò a naufragare con la tranquillità di spirito che deriva dalla piena sicurezza di procedere ad allontanarsene.

LEZIONE XIII.

Della correzione delle rotte.

137. *Della correzione per la declinazione dell' ago.* Per correggere l'errore che in una rotta apparente esiste per la declinazione dell'ago, quando si naviga con bussola scorretta, bisogna riflettere che se essa è al NE tutti i rombi declineranno della sua medesima quantità nello stesso senso, cioè dalla parte destra dell'osservatore rivolto a ciascuno di essi, e mentalmente situato al centro della rosa, del pari che egli è al centro del proprio orizzonte da quella rappresentato; e se è NO i rombi tutti declineranno a sinistra. Laonde, la declinazione dell'ago nella correzion della rotta può bene esser valutata dall'una o dall'altra parte della direzione apparente, e solo dovrassi ritenere che nel correggere una rotta la declinazione NE dovrà esser valutata sempre a *dritta*, e la NO sempre a *sinistra*.

138. *Della deriva.* La declinazione dell'ago però non è la sola quantità di cui devesi correggere la rotta dalla nave apparentemente seguita; imperciocchè quando il vento non è favorevole, e le vele sono orientate obliquamente alla chiglia, il bastimento essendo spinto di lato seguirà effettivamente una direzione ad angolo con essa. Questo angolo fatto dalla vera direzione del cammino di un vascello con la chiglia dicesi *deriva.*

Se AB (*fig.* 22) rappresenta l'asse di un vascello di cui A sia la poppa, C il centro di gravità, mentre la vela ED trovisi orientata obliquamente alla chiglia, e VC rappresenti la direzione e la forza del vento; questa, per la sua obliquità alla vela, si decompone nelle VF parallela al pennone e di niuno effetto, ed FC al pennone perpendicolare; il quale, comunicando lo sforzo all'albero ed indi alla nave, la farebbe andare secondo CH; per la qual cosa decomponendo la FC in FG e GC, questa dovrebbe rappresentare la quantità di cui la nave si avanza nel senso dell'asse.

Ma la colonna d'acqua di sottovento per la gran resistenza che offre su l'intero fianco della nave, la quale di più è costruita in modo che con la prua trovasi il meglio atta a fendere le acque, addurrà sempre

una gran diminuzione alla FG e quindi un aumento alla GC; per cui la direzione della nave, sarà tra CH e CB, come CL, per esempio. E questa sarà più vicina a CH o a CB, secondochè lo sforzo del vento e del mare sarà maggiore o minore della resistenza delle acque di sottovento.

Per lo sforzo del vento devesi intendere, non già esclusivamente il grado diverso di sua gagliardia, ma la risultante dell'azione che ha sul corpo della nave e su tutte le vele, le quali quanto più saranno alte o inclinate all'orizzonte, per lo sbandamento della nave, meno saranno vantaggiose alla GC. E per lo sforzo del mare si dovrà considerare non solo la sua velocità, ma pure l'angolo che la sua direzione fa con quella del vento e con quella della nave.

Or se supponiamo l'angolo BCD = 30°, sarà l'altro BCH = 60°; e quindi possiamo da ciò inferire non giunger mai la deriva a 60°, allorchè si regge vela quadra al vento; e che potrà esservi così fatto angolo di deriva, e forse talvolta uno maggiore, solo quando, per gran mare e vento molto fortunale, non si ha nessuna vela al vento, o qualche piccola vela latina, perocchè in tal caso la CH perpendicolare al penuone ED, si avvicina alla perpendicolare della chiglia.

Da ciò è chiaro avere un bastimento latino maggior deriva di un bastimento quadro, generalmente parlando; ma essendo la vela latina, meglio atta a stringere il vento, che la vela quadra; e questo vantaggio trovandosi, allorchè il vento è maneggevole, superiore alla perdita relativa alla maggior quantità di deriva; siegue che con vento leggiero un bastimento latino guadagnerà al vento più che un legno quadro.

Quest'angolo però, cotanto variabile pel vento, pel mare, per la velocità, per la velatura, per la rotta più o meno stretta al vento e per la diversa costruzione de' bastimenti, è facile determinare mercè la scia; la quale essendo la traccia del cammino vero dal bastimento seguito, sarà come AM parallela a CL; e col mezzo di un semicerchio fissato sulla parte superiore del quadro di poppa, potrà sempre osservarsi l'angolo che forma con la chiglia, la cui direzione indica la rotta apparente.

Ad onta di ciò l'esperienza e la conoscenza del proprio bastimento debbono aver buona parte, comechè semplicemente discretiva, nella estimazione della deriva; imperciocchè, quantunque si osservi in talune circostanze a piccoli intervalli, pure la non si registra nel giornale di

navigazione che in ogni ora, come ancora si pratica con gli altri elementi del calcolo del punto stimato.

139. *Della correzione per la deriva.* Possiamo intanto conchiudere che la deriva non avrà luogo quando si naviga con vento in poppa, ma comincerà a poter esistere quando il vento è a meno di 90° distante dalla prua; e che esisterà quasi sempre allorchè si naviga di *bolina*, o sia facendo con la prua un angolo di *sei quarti* rispetto alla direzione del vento: possiamo inoltre stabilire che la deriva è una quantità angolare di cui la rotta apparente è affetta, e per la quale questa mostrasi sopravento alla vera direzione dalla nave seguita; e che quindi nella valutazione della rotta vera *bisogna sempre computarla da sottovento.*

140. *Della correzione della rotta.* In conseguenza di ciò, per dedurre la vera rotta della nave mediante la conoscenza della declinazione dell'ago, e della deriva, basta distinguer due casi: cioè, che la rotta sia da intràprendere, o che siasi di già corsa.

Quando la rotta sia da intraprendere, è chiaro doversi prima valutare i necessarî compensi, indi assegnare tal rotta apparente che debbasene dedurre di conseguenza la rotta vera.

E però dovranno le dette due quantità computarsi dalla parte opposta a quella ove di loro natura influiscono: vale a dire la deriva si valuterà in questo caso da sopravento; la declinazione NE a sinistra, e la NO a dritta della rotta da assegnarsi.

Così volendo dirigere al S $\frac{1}{4}$ SO da un luogo ove sia la declinazione dell'ago 17° NO; e nell'atto che le circostanze del mare e del vento fanno stimare che per la velatura conveniente, il proprio bastimento possa avere 11° di deriva con le mure alla dritta; dovrà dirigersi la prua a S 39° 15′ O del compasso di rotta; onde ottenere per rotta corretta il S $\frac{1}{4}$ SO, secondo il fatto proponimento.

Nell'altro caso, quando si tratti di determinare la vera rotta seguita da una nave durante un cammino già fatto, le valutazioni della deriva e della declinazione dell'ago saranno dirette: cioè la deriva sarà sempre valutata a sottovento, e la declinazione a dritta se è NE ed a sinistra se è NO. Così avendo navigato con le mure alla dritta per S 39° 15′ O

con un compasso di rotta avente 17° di declinazione NO, e la deriva essendo stata di 11°, si sarà effettivamente navigato per S $\frac{1}{4}$ SO.

141. Oltre alla declinazione dell'ago e alla deriva, in taluni paraggi esistono delle correnti che secondo la loro velocità e direzione concorrono a produrre degli errori spesso gravissimi nella estimazione del rombo navigato e del cammino percorso.

In fatti, se la direzione di una corrente fosse la stessa di quella della nave, bisognerebbe alla velocità di questa aggiugnere la velocità della corrente: e se le direzioni fossero opposte sarebbe mestieri detrarre dal cammino della nave, la quantità relativa alla velocità della corrente, quantunque in questi due casi il rombo navigato non soffrirebbe alterazione veruna. Ma se la direzione della corrente facesse angolo con quella della nave, è manifesto dover questa necessariamente proceder per la risultante. Quindi, costruito il parallelogrammo delle forze, si verrebbe, con le teoriche della trigonometria piana, a determinare il cammino e la direzione della nave.

Siccome però in tutte e tre i casi è indispensabile esser nota la direzione e velocità della corrente, che noi non solo non sappiamo quasi mai, ma eziandìo manchiamo de' mezzi da ottenerne la conoscenza; così non ci tratterremo d'avvantaggio su tal proposito. E per ora ci contenteremo solamente di aver richiamata su di ciò l'attenzione dell'uomo di mare.

LEZIONE XIV.

Del giornale di navigazione.

142. Ogni individuo del bordo cui incumbe il dovere di notare le circostanze e le novità riguardanti il vascello e la navigazione di esso, è obbligato a tenerne registro in un libro che dicesi *giornale di navigazione.*

Bisogna cominciare questo giornale dal notarvi l'epoca e l'ordine d'imbarco, ed il nome e grado di chi comanda la nave; indi il luogo dov'essa si trova, ed il come sta ormeggiata, se è all'ancora in porto o in rada; o pure quando la nave fosse alla vela, la latitudine e lon-

gitudine di essa, o qualche esatto rilevamento da stabilire con precisione il luogo dell' imbarco: indicarne la velatura, e tutte le altre circostanze che si stimeranno necessarie. In ambo i casi però prenderà nota dei viveri, delle munizioni, del numero dell'equipaggio, de' disertori quando ve ne fossero; e terrà conto de' malati, e del genere della malattia quando potesse somministrar certezza o sospetto di contagio.

143. Dopo aver notato tutto ciò che riguarda lo stato presente del vascello sul quale si è imbarcato, fa mestieri scrivere partitamente le dimensioni principali di esso: lunghezza in chiglia, lunghezza in coverta, baio massimo, altezza di puntuale, slancio di poppa, slancio di prua, dragante, linea d'acqua; alberi maggiori e di gabbia, pennoni maggiori, pulsate della gomena ec. ec. Indi tutto ciò che riguarda il piano di stiva, con aggiungervi il disegno di esso, co' più minuti particolari che sarà possibile.

144. Fatti questi preliminari si aprirà il giornale di navigazione propriamente detto; cioè si comincerà a registrarvi tutto ciò che accade, ed all' ora precisa dello avvenimento, eccetto solo le meccaniche disciplinari del bordo, quando non fossero accompagnate da casi accidentali.

145. Il giorno vien contato all' uso astronomico, cioè da un mezzodì all' altro, e potrebbero contarsi le 24 ore di seguito. Ma forse per un tributo agli usi civili, si dividono in due periodi, cioè 12 ore p. m., e 12 ore a. m. E siccome la durata di così fatto giorno racchiude due parti di due diversi giorni civili, cioè le 12 ore p. m. del primo, e le 12 ore a. m. del seguente così vien intestato il giorno con due nomi, vale a dire, a cagion d'esempio, *Venerdì 10 a Sabato 11 Luglio 1840;* mentre in fatti non trattasi che del giorno astronomico venerdì 10 luglio.

Questo modo di contare il giorno è assai comodo per gli usi di mare; dappoichè quando si naviga, dovendosi alla fine di ogni giorno registrare il punto dove trovasi la nave sulla superficie del globo, riesce più comodo finire il giorno a mezzodì che a mezza notte; e più ancora perchè la latitudine della quale si può meglio fidare in pelago si è

quella che si ottiene per mezzo dell'altezza meridiana del sole, giacchè la notte quasi mai può distinguersi l'orizzonte.

146. Essendo in porto però non sarà necessario segnare tutte le 24 ore di seguito; basterà distinguere i due periodi principali *p. m.* ed *a. m.* e quindi notare la circostanza qualunque sia, indicando l'ora in cui è avvenuta.

Esempio.

Venerdì 10 a Sabato 11 Luglio 1840.

P. M. *Aria chiara con piccola brezza dall' ovest.*
Alle 4 $\frac{1}{2}$ sonosi imbarcate 29 botti d' acqua.
Al tramontar del sole si sono posti a basso i velacci, ad esempio della comandante.
A. M. *Aria alquanto nuvolosa e vento fresco dal NE.*
Al sorgere del sole si è levata una volta alle gomene.
Alle 9 $\frac{1}{2}$ il comandante della squadra ha chiamato all' ordine con un segnale.
Alle 11 si sono fatti esercizi di vele, ad esempio della comandante.
Nelle 24 ore. *Aria per lo più chiara e vento dal 3.° e 1.° quadrante.*

147. Allorchè poi si naviga, dovendo in ogni ora registrare il cammino, l'apparente direzione di esso, il vento, la deriva, e la declinazione dell'ago, e qual'è stata la rotta corretta, si dà un'altra forma al registro degli avvenimenti. Cioè: si divide in pria la larghezza della pagina in due parti, scrivendovi a sinistra la *declinazione dell' ago* se vuolsi navigare con bussola scorretta, ed a dritta la *data del giorno astronomico* che corre, denominandolo come si è già detto, poscia per mezzo di linee si stabiliscono 8 colonne intestandole *ora*, *miglia*, *decimi*, *rombo*, *vento*, *deriva*, *rotta corretta*, e l'ultima più grande delle altre col titolo *accidenti e manovre*. Sotto di questa si scrivono, come al solito, gli accidenti e le manovre, lo stato dell'aria, la gagliardia del vento; ed in fine si nota il *punto arrivato a mezzodì*, sia *stimato*, sia *stimato corretto*, sia *osservato;* semprechè, non essendo a veggente di terra, non possa farsi una rilevazione sicura, come s'intenderà, quando saremo al proposito del punto stimato. Nè que-

sto punto fatto in ogni mezzodì dovrà essere il solo, ma sempre che si può si noterà qualche rilevamento che potrà farsi con sicurezza, come già si è detto, principalmente al sorgere e al tramontare del sole.

148. Qui è da notare che navigando, a vento stretto principalmente, la rotta che alla fine di ogni ora scrivesi nel giornale dovrà dipendere da un giudizioso coacervo fatto su tutte le oscillazioni che la direzione della prua subisce per l'incostanza del vento e del mare, o per altra circostanza qualunque durante l'ora; e perciò non sarà necessario indicare il vento fino alla precisione del grado, anche allorquando navigasi di bolina: la sarebbe sottigliezza senza scopo, essendo essa infine, nella direzione delle rotte, utile solamente a mostrarci da qual parte la deriva dovrà essere computata.

Avvertiamo ancora che il cammino col loche scandagliato va similmente soggetto a delle considerazioni, per le quali è scritto nel giornale in quantità spesso diversa da quella dall'istrumento indicata: come per esempio, esser mutata nel corso dell'ora la gagliardia del vento, esser cresciuta o diminuita la velatura, aver posto in panno per parlamentare o attendere un bastimento, ec.

149. *Esempio 1.°*

Si naviga con bussola corretta.	Giovedì 8 a Venerdì 9 aprile 1841.

Ora.	Miglia.	Decimi.	Rombo.	Vento.	Deriva.	Rotta corretta.	ACCIDENTI E MANOVRE.
1	4	5	S $\frac{1}{4}$ SE	SO $\frac{1}{4}$ O	6°	S 17°.15′ E	P. M. Aria chiara.
2	6	0	»	»	»	»	Si naviga con basse vele, gabbie e velacci.
3	5	5	Sud	OSO	»	S 6.00 E	Alle 7 si è serrato un terzarolo alle gabbie.
4	4	0	»	»	»	»	*Nella scoverta al tramontar del sole*, sonovi due bastimenti mercantili
5	4	6	»	»	»	»	in vista. In quanto alle manovre,
6	4	5	S 5° O	»	»	S 1.00 E	nessuna novità.
7	4	5	»	»	»	»	A. M. Aria chiara. Ad $\frac{1}{4}$ sonosi murate le basse vele.
8	2	0	NO	OSO	12	N 33.00 O	Alle 2 pel vento fresco si sono serrati i velacci; e poco dopo si sono im-
9	3	0	NO $\frac{1}{4}$ N	O $\frac{1}{4}$ SO	9	N 24.45 O	brogliate le basse vele.
10	4	5	N 5°. O	O $\frac{1}{4}$ NO	»	N 4.00 E	
11	3	0	N 5°. E	ONO	»	N 14.00 E	*Rilevazione al sorgere del sole.*
12	2	5	NE	NNO	»	N 54.00 E	La punta SE dell' isola . . . . resta per NNO distante 16 miglia.
1	5	8	NO	NE	0	NO	*Nella scoverta* sono in vista 7 bastimenti quadri per diversi rombi.
2	7	5	»	»	»	»	Per le manovre nessuna novità. Alle 6 si son fatti vela i velacci.
3	10	0	ONO	»	»	ONO	Si sono lavate le brande della *guardia*
4	7	0	O $\frac{1}{4}$ NO	»	»	O $\frac{1}{4}$ NO	*dritta*.
5	2	7	E $\frac{1}{4}$ SE	NNE	»	E $\frac{1}{4}$ SE	*Rilevazione alle 9.*
6	3	0	Est	»	5	E 5.00 S	Capo . . . . . resta per N $\frac{1}{4}$ NO di-
7	3	5	»	»	»	»	stante 25 miglia circa. Dalle 11 alle 12 si sono fatti esercizi
8	4	0	E 17°. S	NE $\frac{1}{4}$ N	»	E 22.00 S	di vele.
9	4	2	SE $\frac{1}{4}$ E	NE $\frac{1}{4}$ E	»	S 51.15 E	*Punto . . . . a mezzodì.*
10	4	0	ESE	NE	6	E 28.30 S	Latitudine . . . .
11	3	0	E $\frac{1}{4}$ SE	NE $\frac{1}{4}$ N	»	E 17.15 S	Longitudine. . . . .
12	3	0	Est	NNE	»	E 6.00 S	*Nelle 24 ore* aria per lo più chiara, e vento quasi sempre maneggevole.
	100	3					

150. *Esempio 2.°*

La declinazione dell' ago è 10° NE. | Venerdì 10 a Sabato 11 aprile 1841.

Ora.	Miglia.	Decimi.	Rombo	Vento.	Deriva.	Rotta corretta.	ACCIDENTI E MANOVRE.
1	3	4	ENE	Nord	6°	E 6°.30' N	P. M. Aria alquanto nuvolosa.
2	2	7	»	»	»	»	Si naviga con basse vele, gabbie serrate di un terzarolo, e velacci.
3	3	8	»	»	11	E 1.30 N	Alle 4 si è battuta la *generale* e si sono fatti esercizi a fuoco di cannone e moschetteria fino alle 6.
4	3	0	NE¼E	N¼NO	»	N 77.15 E	
5	2	5	»	»	»	»	*Rilevazione al tramontar del Sole.*
6	2	0	»	»	»	»	
7	2	7	NE	NNO	»	N 66.00 E	Capo . . . . resta per E 37° N e capo . . . . . per S 5°. O.
8	1	8	ENE	Nord	6	N 83.30 E	*Nella scoverta* non v'è novità di sorta alcuna.
9	0	8	»	»	»	»	
10	1	5	»	»	»	»	A. M. Aria chiara.
11	3	7	»	»	11	N 88.30 E	*Nella scoverta al sorgere del sole* sono in vista due bastimenti mercantili. Il parrochettiere di scoverta ha esposto abbisognare di accomodo il guardacoffa di parrochetto.
12	4	5	»	»	»	»	
1	4	5	»	»	»	»	
2	4	5	»	»	»	»	Alle 7 si è accomodato il guardacoffa suddetto.
3	4	5	»	»	»	»	Dalle 8 alle 9 si sono esercitati i marinari di nuova leva alla nomenclatura ed al passaggio dei cavi.
4	8	8	»	»	»	»	
5	3	2	»	»	»	»	
6	1	5	ONO	»	6	N 63.30 O	*Punto . . . . a mezzodì.*
7	2	0	»	»	»	»	Latitudine.......
8	2	5	»	»	»	»	Longitudine....
9	3	5	»	»	11	N 68.30 O	*Nelle 24 ore* aria quasi sempre nuvolosa, e vento leggiero.
10	4	0	»	»	»	»	
11	4	0	»	»	»	»	
12	3	0	»	»	»	»	
	78	4					

151. *Esempio 3.°*

La declinazione dell' ago è 16° NO							Sabato 10 a Domenica 11 Aprile 1841.
Ora.	Miglia.	Decimi.	Rombo.	Vento.	Deriva.	Rotta corretta.	ACCIDENTI E MANOVRE.
1	4	»	OSO	Sud	11°	S 62°.30′O	
2	4	3	»	»	13	S 64.30 O	
3	5	0	SO $\frac{1}{4}$ O	S $\frac{1}{2}$ SE	7	S 47.15 O	
4	6	0	SO	ESE	00	S 29 00 O	
5	6	5	»	»	»	»	
6	8	0	»	»	»	»	
7	8	5	»	»	»	»	
8	7	0	»	»	»	»	
9	7	5	»	»	»	»	
10	7	5	»	»	»	»	
11	7	5	»	»	»	»	
12	6	0	»	»	»	»	
1	5	0	»	»	»	»	
2	5	0	»	»	»	»	
3	3	2	S $\frac{1}{4}$ SO	O $\frac{1}{4}$ SO	7	S 11.45 E	
4	2	2	S 17° E	SO $\frac{1}{4}$ O	11	S 44.00 E	
5	2	5	»	»	17	S 50.00 E	
6	1	3	S 5° E	OSO	5	S 26.00 E	
7	0	8	»	»	00	S 21.00 E	
8	0	0	»	calma	»	»	
9	0	0	»	»	»	»	
10	2	7	O $\frac{1}{4}$ SO	S $\frac{1}{4}$ SO	3	S 65.45 O	
11	3	8	OSO	Sud	11	S 62.30 O	
12	4	7	SO $\frac{1}{4}$ O	S $\frac{1}{4}$ SE	17	S 57.15 O	
	109	0					

ACCIDENTI E MANOVRE.

P. M. Aria nuvolosa.

Si naviga con basse vele, gabbie serrate di un terzarolo, e velacci. Dalle 3 alle 4 si sono esercitati nella attrezzatura i marinari di nuova leva. *Nella scoverta al tramontar del sole* sono in vista due bastimenti per SSE, che dirigono all'ovest. Il gabbiere di scoverta ha riferito trovarsi l'infasciatura del rattino di gabbia della dritta patita a due palmi distante dalla bugna, ed esser necessario visitare la trozza del medesimo pennone.

A. M. Aria nuvolosa.

Nella scoverta al sorgere del sole sono in vista due bastimenti a vapore, ed un brigantino mercantile. In quanto alle manovre nessuna novità.

Alle 8 si è cambiata la trozza di gabbia; e si è rinnovata l'infasciatura del rattino di gabbia nel luogo ond'era patita.

Alle 10 si è mollato il terzarolo dalle gabbie, e si son posti arriva e fatti vela i controvelacci.

Alle 10 1/2 si è passata la rivista di *armi* ed *abigliamento* all'intero equipaggio.

Punto . . . . . a mezzodì

Latitudine . . . . .

Longitudine . . . . . .

Nelle 24 ore aria nuvolosa e vento per lo più maneggevole.

LEZIONE XV.

Della riduzione delle rotte.

152. *Riduzione delle rotte.* In mare essendo spesso necessario cangiar di rotta per molte circostanze, e principalmente per la variabilità continua del vento, il cammino fatto in un giorno si compone quasi sempre di più rotte, delle quali ciascuna ha un picciol numero di miglia, che quantunque percorse sullo sferico sogliono per la loro picciolezza assumersi separatamente come linee rette; e quindi il cammino fatto in un giorno potrà rappresentarsi, come una seguela di piccole linee rette, delle quali si è notata col mezzo della bussola la direzione, e col mezzo del loche la estensione: come il tutto si è già osservato nel giornale di navigazione.

Sia A (*fig. 23*) il punto di partenza, H quello dell'arrivo; B, C, D, E i punti delle posizioni intermedie. Il nostro scopo dovrà essere quello di determinare AS differenza di latitudine tra i punti di partenza e di arrivo, ed AS appartamento ovest, o sia numero di miglia delle quali il punto di arrivo è più all'ovest di quello della partenza. Or risolvendo tutti i piccoli triangoli piani ABx, BCy ec.: e contraendo rispettivamente tra loro le quantità nord e sud, cioè By + Cz + Ev + Ew — Ax = AS e quelle est ed ovest vale a dire Hw + Dz — Bx — Cy — Dv = HS, avremo, com'è chiaro, le due quantità AS ed HS. E nel triangolo HAS, noti i due cateti, conosceremo la così detta *rotta composta*, cioè AH che suol chiamarsi *distanza navigata* ed HAS che dicesi *rombo navigato*.

Questa operazione di ridurre tutte le rotte parziali di un intero giorno ad una rotta totale dicesi in generale *riduzione delle rotte:* e per brevità suole in ciò adoperarsi un metodo grafico, mercè uno strumento detto *quadrante di riduzione*.

153. *Descrizione ed uso del quadrante di riduzione.* Il *quadrante di riduzione* è una specie di carta generale che conviene a tutte le differenti parti della superficie del globo terrestre; essendo per la sua costruzione sempre atto a potervi tracciare il rombo e la distanza navigata, per dedurne gli avanzamenti fatti per meridiano e per parallelo,

e viceversa; anzi possiamo adoperarlo alla risoluzione di tutti i triangoli rettilinei rettangoli, allorchè n'è permesso servirci di un mezzo grafico, e rinunziare alla esattezza del calcolo trigonometrico.

Esso è di figura rettangolare o quadrata, e nella riduzione delle rotte rappresenta sempre un quadrante dell'orizzonte. Due de' suoi lati ad angolo retto sono divisi in molte parti uguali tra di loro e reciprocamente: in guisachè tirate da' punti di divisione tutte le perpendicolari rispettivamente a' lati da cui partono, si avrà l'intero rettangolo diviso in un gran numero di piccoli quadrati tutti eguali tra loro. Indi preso per centro uno degli angoli del rettangolo totale, e per intervalli successivamente tutte le distanze de' punti di divisione, da esso vertice si descrivono altrettanti archi, e quello che ha per raggio l'intero lato minore del rettangolo si divide ne' suoi 90°. La scelta del vertice, che deve servir di centro comune a tutti così fatti archi, generalmente si fa cadere sopra uno di quei due che, avendo lo strumento in mano per servircene, possa rappresentarci il primo quadrante dell'orizzonte, quantunque debba esso rappresentarli tutti e quattro indifferentemente; e per maggior comodo vi vengono tracciati i sei rombi intermedî del quadrante; giacchè i due principali sono dinotati dagli stessi due lati del rettangolo che hanno per vertice il centro comune di tutti gli archi.

Da tal centro comune degli archi si fa sporgere un fil di seta di sufficiente lunghezza, onde col suo mezzo e mercè l'arco graduato poter al momento indicare uno degli angoli obliqui del triangolo rettangolo che si risolve, senza lasciar traccia che alteri la nettezza e la semplicità dello strumento; e per comodo maggiore vi si pone alla cima esteriore un ago comune, onde fissare il vertice del secondo angolo obliquo, e mostrar tracciato l'intero triangolo che ne abbisognava risolvere.

Or dunque, se avendo alla mano questo strumento, consideriamo, come suol praticarsi, il lato verticale per la linea nord e sud, il lato orizzontale dinoterà la linea est ed ovest; laonde, sebbene non rappresenti lo strumento che il solo primo quadrante, può con facilissimo concepimento rappresentarli tutti. Ed in conchiusione, potendosi con esso risolvere graficamente qualunque triangolo rettilineo rettangolo, ed avendo noi dalla bussola e dal loche, un angolo e l'ipotenusa, saremo sempre in grado di trovare col quadrante i due cateti.

Fa d'uopo intanto avvertire che nella pratica può valutarsi la distanza dall'una all'altra divisione, e dall'uno all'altro arco del quadrante per 1, 2, 3, 4, 5 ec. miglia, secondo meglio torna conto in riguardo alla minore o maggior lunghezza de' lati del triangolo che si deve risolvere.

Di questo strumento i piloti fanno continuamente uso, con grande vantaggio e speditezza; ed in difetto si avvalgono della *Tavola I:* pur nondimeno essendo quello un metodo grafico, e questa calcolata considerando i rombi solo di grado in grado, quando si vogliano dei risultamenti esatti, fa d'uopo avvalersi dei mezzi trigonometrici, principalmente nella costruzione del triangolo ridotto, e se abbiasi idea di voler adoperare l'angolo del rombo navigato nella ricerca della differenza di longitudine.

154. *Costruzione del triangolo ridotto.* Vale a dire che nelle rotte parziali si conosce il rombo e la distanza, e mercè la risoluzione del triangolo si fan noti gli avanzamenti a N. a S. a E. e ad O. che siano, sommando insieme tutti quelli del medesimo nome; indi con la contrazione di questi a due a due, cioè i due per meridiano tra loro, e tra loro i due per parallelo, si hanno i cateti della rotta composta; e con essi giugnesi alla conoscenza del triangolo che suol denominarsi *triangolo ridotto*, per la costruzione del quale, avendo i due cateti, potremo egualmente rinvenire col quadrante l'angolo del rombo e la distanza navigata.

155. *Esempio 1.° (149).*

Miglia.	Rotta corretta.	N.	S.	E.	O.
10,5	S 17°. 15′ E	»	10.0	3.1	»
14,1	S 6.00 E	»	14.0	1.5	»
9,0	S 1.00 E	»	9.0	0.2	»
2,0	N 33.00 O	1.7	»	»	1.1
3,0	N 24.45 O	2.7	»	»	1.3
4,5	N 4.00 E	4.5	»	0.3	»
3,0	N 14.00 E	2.9	»	0.7	»
2,5	N 54.00 E	1.5	»	2.0	»
13,3	NO	9.4	»	»	9.4
10,0	ONO	3.7	»	»	9.2
7,0	O ½ NO	1.3	»	»	6.9
2,7	E ¼ SE	»	0.5	2.6	»
6,5	E 5.00 S	»	0.5	6.4	»
4,0	E 22.00 S	»	1.5	3.7	»
4,2	S 51.15 E	»	2.6	3.3	»
4,0	E 28.30 S	»	1.9	3.5	»
3,0	E 17.15 S	»	0.9	2.9	»
3,0	E 6.00 S	»	0.3	3.0	»
106,3		27.7	41.2	33.2	27.9
			27.7	27.9	
			13.5	5.3	

Con questi due cateti costruito il triangolo ridotto *qmn* (*fig. 24.*) si avrà l'angolo del *rombo navigato* = 21° 26′, e la *distanza navigata* = 14,5 miglia.

156. *Esempio 2.° (150).*

Miglia.	Rotta corretta.	N.	S.	E.	O.
10,2	N 83°. 30′ E	0.1	»	10.1	»
37,5	N 88 . 30 E	1.0	»	37.5	»
7,5	N 77 . 15 E	1.6	»	7.3	»
2,7	N 66 . 00 O	1.1	»	»	2.5
6,0	N 63 . 30 O	2.7	»	»	5.3
14,5	N 68 . 30 O	5,3	»	»	13.5
78,4		11.8	»	54.9 21.3	21.3
				33.6	

Costruito e risoluto il triangolo ridotto *qmn* (*fig.* 25.) avremo il *rombo navigato* = 70°, 39′, e la *distanza navigata* = 35,6 miglia.

157. *Esempio 3.° (151).*

Miglia.	Rotta corretta.	N.	S.	E.	O.
7.8	S 62°. 30′O	»	3.6	»	6.9
4.3	S 64 . 30 O	»	1.8	»	3.9
5.0	S 47 . 15 O	»	3.4	»	3.7
74.5	S 29 . 00 O	»	65.1	»	36.1
3.2	S 11 . 45 E	»	3.1	0.5	»
2.2	S 44 . 00 E	»	1.6	1.5	»
2.5	S 50 . 00 E	»	1.6	1.9	»
1.3	S 26 . 00 E	»	1.2	0.6	»
0.8	S 21 . 00 E	»	0.7	0.3	»
2.7	S 65 . 45 O	»	1.1	»	2.4
4.7	S 57 . 15 O	»	2.5	»	4.0
109.0			85.7	4.8	57.0
					4.8
					52.2

Costruito il triangolo ridotto *qmn* (*fig. 26.*) e fattane la soluzione si ha l'angolo del *rombo navigato* = 31°, 21, e la *distanza navigata* = 100,3 miglia.

LEZIONE XVI.

Espressione del triangolo ridotto.

158. *Distinzione de' rombi.* Allorchè si è avuto il triangolo ridotto, la distanza, o sia l'ipotenusa del triangolo, non è più tale da potersi considerare, senza un positivo errore, come percorsa su di un piano, ma bisognerà tener conto della sfericità della terra.

Imperciocchè se il vascello avrà navigato per nord o sud avrà percorso un arco di meridiano; se per est od ovest un cerchio ma non massimo, eccetto il solo caso che la navigazione sia seguita sull'equatore; e se per un altro rombo qualunque, una linea a doppia curvatura, che però addimandasi *lossodromia.*

In fatti, rappresentino PM e PM' (*fig. 27*) le proiezioni ortografiche di due meridiani infinitamente vicini, A il punto della partenza, B quello dell'arrivo.

L'arco AB che vi conduce, potrà esser considerato come linea retta, con maggior ragione di quanto si è praticato nella riduzione delle rotte parziali; in dove sonosi considerate linee rette le ipotenuse per lo più di 4, o 5 miglia e talvolta molto maggiori, secondo la distanza che si può percorrere per un dato rombo, come si è veduto nella formazione del giornale di navigazione, e nella riduzione delle rotte.

Se continueremo a considerare la distanza AB come linea retta, allorchè la sfericità della terra si rende sensibile, commetteremo un doppio errore. 1.° Perchè navigando su di un globo, la linea che si descrive non potrebbe essere che un arco di cerchio, come ne' primi due casi. 2.° Perchè i marini avendo per guida della rotta la bussola, riconducono continuamente col mezzo del timone la prua della nave allo stesso punto della rosa, e quindi le fanno serbare sempre lo stesso angolo con tutti i meridiani.

Da ciò siegue che giunta la nave in B, lungi dal continuare il cammino secondo BD è obbligata a seguire la BC.

Or nel triangolo PAB, il lato AB prolungato in D dà $DBP = BAP + APB$; ma per ipotesi $BAP = CBP$, dunque $DBP > CBP$; vale a dire che per essersi la rotta conservata eguale a se stessa, da un meridiano all'altro, ha dovuto piegare verso il polo, nel nostro caso che la la-

titudine arrivata è maggiore della partita; e viceversa nell'altro caso. Laonde la curva a questo modo descritta non è più un arco di cerchio, ma è a doppia curvatura, o un'aspirale; ed una nave che percorresse sempre lo stesso rombo obliquo, farebbe un'infinità di rivoluzioni intorno al polo, senza mai giungervi, se l'angolo non diviene o°. Quindi è derivata la distinzione de' rombi in *retti*, *paralleli* ed *obliqui*: diconsi *retti* quando si naviga per meridiano; *paralleli*, quando si naviga per parallelo; ed *obliqui* in tutti gli altri casi.

159. *Espressione del triangolo ridotto.* Il triangolo ridotto adunque benchè rappresentato come triangolo piano, è in realtà formato da un arco di meridiano, e perciò di cerchio massimo, ch'è la differenza di latitudine; da un arco di equatore, ch'è l'appartamento avuto espresso in minuti dell'equatore, cioè in miglia, il quale ne fa mestieri rilevare quanti minuti di longitudine comprende in sul parallelo dell'arrivo; e finalmente dalla parte di lossodromia intercetta tra i meridiani della partenza e dell'arrivo, sotto l'angolo del rombo navigato.

Sia A il punto di partenza (*fig. 28.*), B quello di arrivo, AB la rotta lossodromica che fa lo stesso angolo con tutti i meridiani, P il polo, LE l'arco di equatore interposto tra i due meridiani della partenza e dell'arrivo, ed AC e BD i paralleli di questi medesimi punti. Si ponga $KA = l$, $EB = l'$; e si consideri AB come formata da un numero infinito di piccole linee rette tutte eguali, ed nq sia una di esse, che chiameremo α.

Nel triangolo infinitesimale nqm nel quale l'angolo q è l'azzimutto costante durante la rotta AB, e che indicheremo con z, si ha $mq = \alpha \times \cos z$, ed $nm = mq \tan z$. E queste medesime proprietà rinverremo in tutti gl'infiniti triangoletti aventi le parti nq per ipotenuse.

Facendo la somma di tutte le quantità mq, avremo l'arco $AD = l \backsim l'$, differenza di latitudine; ma cos z è fattore costante, la somma delle quantità α è la rotta totale AB che chiameremo a, dunque
$l \backsim l' = a \cos z =$ *differenza di latitudine.*

160. Nella seconda equazione $nm = mq \tan z$, mn arco di cerchio minore, non è uguale a gf arco di cerchio massimo; dobbiamo adunque prima di ogni altra cosa esaminare il rapporto in cui sono fra essi.

Rappresentino Pg, Pf (*fig.* 29.) due quadranti di meridiani, gf un arco di equatore simile ad mn arco di parallelo, Pr il semiasse terrestre, gr, mt i raggi rispettivamente dell'equatore e del parallelo; abbiamo per la geometria $gf : mn :: gr : mt$, ma mt è coseno di gm, latitudine del punto m, adunque $gf : mn :: R : \cos \lambda$, chiamiamo λ la latitudine di mn, e sarà $mn = fg \cos \lambda$.

Ma pel triangolo infinitesimale mnq (*fig.* 28), $mn = mq \tan z$;

perciò $fg \cos \lambda = mq \tan z$, ed $fg = \frac{mq \tan z}{\cos \lambda}$;

ma la somma di tutte le fg dà il valore di EK ch'è la differenza di longitudine, dunque per conoscer questa dobbiamo occuparci a determinare il valore di $\frac{mq \tan z}{\cos \lambda}$. In questa espressione $\tan z$ è fattore costante, per ciascuna lossodromia, ne rimane quindi a rinvenire il valore della somma di tutte le frazioni $\frac{mq}{\cos \lambda}$.

Chiamiamo A la somma di tutte le frazioni $\frac{mq}{\cos \lambda}$, e P la differenza di longitudine EK, avremo $P = A \tan z$.

Questa grandezza A venne detta ***somma delle parti meridionali***, ed indi ***latitudini crescenti***, perchè servì alla valutazione dell'accrescimento dei meridiani nella costruzione delle carte ridotte, secondo la proiezione del Mercatore, come a suo luogo diremo. Essa riducesi allo integrale $\int \frac{mq}{\cos \lambda}$ preso da A fino a D, o sia da K fino a D meno da K sino ad A. È d'uopo adunque determinare queste due somme, cioè le parti meridionali della latitudine di partenza e quelle della latitudine di arrivo, che facciamo eguali a A', e A''; quindi
$P = (A' \backsim A'') \tan z$ = *differenza di longitudine*.

Questa differenza però diviene somma quando l'equatore trovasi tra i punti A e B, perocchè in tal caso A'' diviene negativa.

161. Passiamo ora a calcolare la tavola delle latitudini crescenti da 0° fino a l latitudine qualunque. Si ponga $= \lambda$ la latitudine rispettiva di ciascuna delle parti qm, dall'equatore sino ad l:

abbiamo $\Lambda = \int \frac{qm}{\cos\lambda} = \int \frac{d\lambda}{\cos\lambda}$, o sia

$\Lambda = \int \frac{d \operatorname{sen} \lambda}{\cos^2 \lambda} = \int \frac{d \operatorname{sen} \lambda}{1 - \operatorname{sen}^2 \lambda}$ e ponendo sen $\lambda = x$, sarà $\Lambda = \int \frac{dx}{1 - x^2}$

ma $\frac{dx}{1 - x^2} = \frac{dx}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{\frac{1}{2} dx}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2} dx}{1 - x}$; adunque

$\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} - \frac{1}{2} \int \frac{-dx}{1 - x}$;

quindi avremo

$\Lambda = \frac{1}{2} \log nep\,(1 + x) - \frac{1}{2} \log nep\,(1 - x) = \frac{1}{2} \log nep \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

e sostituendo il valore di x

$\Lambda = \frac{1}{2} \log nep \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \lambda}{1 - \operatorname{sen} \lambda}\right) = \log nep \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \lambda}{1 - \operatorname{sen} \lambda}}$;

ma noi abbiamo dalla trigonometria che

$\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \lambda}{1 - \operatorname{sen} \lambda}} = \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \lambda)$,

dunque $\Lambda = \log nep \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \lambda)$. Vale a dire l'integrale dovrà esser preso dall'equatore in dove $\lambda = 0$, sino a l latitudine qualunque, per la qual cosa avremo

$\Lambda = \log nep \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \lambda) = \frac{1}{M} \times \log tab \tan (45^\circ + \frac{1}{2} l)$.

Or asssumendo sen 1′ per unità delle tavole da costruirsi, perciocchè in miglia viene appunto espresso a cammino dalla nave percorso, si avrà

$\Lambda = \frac{1}{M \operatorname{sen} 1'} \log tab \tan (45^\circ + \frac{1}{2} l)$; ma il modulo delle tavole,

$M = 0.4342944819032518276$5 il cui log $= \bar{1}.6377843113005367781$7

log sen 1′ $= 6.4637261$

log M sen 1′ $= 6.1015104$

log 1 nel canone trigonometrico $= 10.0000000$

$\frac{1}{M \operatorname{sen} 1'} = 7915',7046741$ il cui log $= 3.8984896$,

e sostituendo sarà $\Lambda = 7915',7046741 \times \log tab \tan (45^\circ + \frac{1}{2} l)$. Cosicchè il calcolo che rimane a fare per costruire la tavola è brevissimo, dovendo solamente addizionare due logaritmi: uno sarà quello

di 7915',7046741 = 3,8984896, che chiameremo *logaritmo costante;* e l'altro sarà log log tan $(45° + \frac{1}{2} l)$ preso nelle tavole de' logaritmi *tabulari, briggiani*, o *ordinarî*, che voglian dirsi.

Esempi.

Si domandano le parti meridionali corrispondenti alle

latitudini . . .	40°.50',	68°.17'.30'',	74°.28'.20''.
$(45° + \frac{1}{2} l)$	= 65 . 25 . . .	79 . 08 . 45 . .	82 . 14 10
log tan	= 0 . 3396242 . .	0 . 7172869 . .	0 . 8653737
log log tan	= $\bar{1}$. 5309987 . .	$\bar{1}$. 8556930 . .	$\bar{1}$. 9372037
log *costante*	= 3 . 8984896 . .	3 . 8984896 . .	3 . 8984896
log A	= 3 . 4294883 . .	3 . 7541826 . .	3 . 8356933
A	= 2688',37	5677',83 . . .	6850',04

Su questa formola Mendoza, Guépratte ed altri hanno calcolate le tavole (Tav. II.) delle latitudini crescenti; le quali essendo formate, potremo facilmente determinare la differenza di longitudine; e indi con la differenza di latitudine di già ottenuta stabilire il punto di arrivo della nave.

LEZIONE XVII.

Del punto stimato.

162. Una delle più interessanti operazioni del marino si è senza dubbio quella di rinvenire in ciascuno istante il punto della superficie del mare ove il bastimento si trova, mediante gli aiuti che ne offre la stima.

Il *giornale di navigazione* dà in ogni tempo i mezzi onde risolvere questo problema, come di già si è esposto; e però a stabilire il punto dell'arrivo ne occorrerà solamente porre insieme le teoriche esposte nelle lezioni XV e XVI.

163. *Soluzione del triangolo ridotto.* La prima cosa da eseguirsi sarà quella della riduzione delle rotte mercè il quadrante di riduzione, o con le tavole, o con gli aiuti trigonometrici; e quindi se il rombo ridotto sarà un rombo obliquo si passerà a stabilire il triangolo ridotto.

164. È ben chiaro che se il rombo navigato sarà un rombo retto, o un rombo parallelo non è d'uopo alcuna costruzione di figura, mentre nel 1.° caso la differenza di latitudine aggiunta o tolta dalla latitudine partita, secondochè siasi navigato verso il polo o verso l'equatore darà la latitudine arrivata, la quale con la longitudine della partenza stabilirà il punto dell'arrivo. Nel 2.° caso basterà ridurre l'appartamento a differenza di longitudine, mercè la proporzione cos *latitudine* : R :: *appartamento: differenza di longitudine*, cioè facendo *differenza* di *longitudine* $= \frac{appartamento}{\cos \textit{latitudine}}$; e così stabilita la longitudine dell'arrivo, con questa e con la latitudine della partenza si sarà determinato il punto dell'arrivo.

165. Ma se il rombo navigato è un rombo obliquo bisognerà cominciare dal costruire il triangolo ridotto, col mezzo de' due cateti rappresentanti la differenza di latitudine e l'appartamento, come si saranno avuti dalla riduzione delle rotte. E qui ne giova avvertire che così fatto triangolo suole costruirsi in modo da far rilevare in qual quadrante siasi navigato, se nel 1°, nel 2°, nel 3°, o nel 4.° Si risolve poscia questo triangolo o col quartiere di riduzione o con la trigonometria, nel qual caso essendo sempre un cateto all'altro come il raggio alla tangente dell'angolo opposto al secondo cateto, dedurremo tang *rombo* $= \frac{appartamento}{differenza\ di\ latitudine}$, e inoltre *distanza navigata* $= \frac{differenza\ di\ latitudine}{\cos rombo}$

166. *Costruzione del triangolo stimato.* Determinate in tal guisa tutte le parti del triangolo ridotto, passiamo ora a costruire il *triangolo stimato.* Questo dovendo similmente essere triangolo rettangolo, ed avendo di più lo stesso angolo di rombo, che ha il triangolo ridotto, gli sarà simile; e però basterà prolungare la differenza di latitudine, di quanto è dovuto di più alla differenza tra la latitudine crescente della partenza e quella dell'arrivo. Da questo estremo si tiri una parallela all'appartamento, indi si prolunghi la distanza fino ad incontrarlo, e si sarà costruito il *triangolo del punto stimato;* nel quale la parallela all'appartamento dinoterà la differenza di longitudine, e la

distanza accresciuta dinoterà l'estensione in miglia della parte di lossodromia relativa al rombo navigato ed intercetta tra i due meridiani della partenza e dell'arrivo, della quale, per altro, non è d'uopo tener conto.

167. In fatti noi abbiamo che sullo sferico (*fig.* 28.) $fg = \frac{mq \tan z}{\cos \lambda}$ allorchè qmn sia un triangolo infinitesimale, e λ la latitudine del parallelo. Or avendo noi formato le tavole delle latitudini crescenti, che si compongono delle somme di tutti i valori di $\frac{mq}{\cos \lambda}$ di minuto in minuto, cominciando da zero latitudine, quando avremo fatto qf eguale alla differenza delle parti di latitudini crescenti dell'arrivo e della partenza, per avere fg stabiliremo l'equazione $fg = \tan z \times$ differenza latitudini crescenti. Ma noi pel triangolo qfg, abbiamo $fg = fq \tan z$, adunque se fq è eguale alla differenza latitudini crescenti, il lato fg rappresenterà la differenza di longitudine: cioè fg rappresenterà quanti minuti di longitudine, in sul parallelo dell'arrivo, comprende l'arco di equatore rappresentato dall'appartamento espresso in miglia. E poichè il minuto dell'equatore o sia il miglio è sempre maggiore del minuto del parallelo; così il numero de' minuti di longitudine su di un parallelo sarà sempre maggiore del numero delle miglia corse per parallelo. D'altronde le tavole delle latitudini crescenti hanno per unità il minuto del meridiano, o sia dell'equatore, e però si avrà la differenza di longitudine egualmente espressa in minuti dell'equatore. Dunque la differenza di longitudine sarà sempre maggiore dell'appartamento nella costruzione dei due triangoli *ridotto* e *stimato;* e ne sarà maggiore nel rapporto stesso che avrebbe dovuto esserne minore; per la ragione che i minuti di latitudine in vece di rimanere sempre eguali, come in fatti dovrebbero sullo sferico, si sono, a motivo della lossodromia, accresciuti appunto nello stesso rapporto che i minuti di longitudine avrebbero dovuto diminuire; quindi questi su tutti i paralleli debbonsi considerare eguali a quelli dell'equatore, acciò sia conservato il rapporto tra il minuto di un parallelo e quello del meridiano in corrispondenza della sua latitudine, come meglio s'intenderà quando sarà proposito della costruzione delle carte idrografiche.

Per ora ci contentiamo di conchiudere che nella costruzione del triangolo stimato la differenza di longitudine dovrà essere sempre maggiore dello appartamento, ad onta che ciascun miglio sia sempre maggiore del minuto di longitudine fuori dell'equatore; e ciò a motivo che per la differenza di latitudine crescente facciamo la differenza di latitudine maggiore del dovere.

168. Questa costruzione del triangolo stimato a primo aspetto ne presenta per la geometria un mezzo facile onde determinare la differenza di longitudine fg (*fig.* 24, 25, 26). Imperciocchè per la simiglianza de' triangoli qmn, e qfg, sarà $qm : mn :: qf : fg$, donde *differenza di longitudine* $= \frac{\textit{appartamento} \times \textit{differenza latitudini crescenti}}{\textit{differenza di latitudine}}$.

169. Volendo però attenersi al risultamento della formola si eseguirà il calcolo secondo l'espressione *diff long* = tan *rombo* × *diff lat crescenti.*

170. Spesso i piloti sogliono servirsi della formola (164) *diff longitudine* $= \frac{\textit{appartamento}}{\cos \textit{latitudine}}$, che per applicarla in questa circostanza modificano sul seguente criterio. L'enunciata equazione regge per tutte le latitudini, adunque trattandosi di differenza di latitudine non molto grande, potremo considerare che il parallelo della latitudine media, sia il medio in lunghezza di circonferenza tra i due paralleli della partenza e dello arrivo, ed avvalercene all'uopo. Per essere esatto questo ragionamento bisognerebbe che, gli accrescimenti degli archi fossero proporzionali alle diminuzioni de' rispettivi coseni; ma ciò non essendo si cadrà in errore, e questo sarà tanto più sensibile quanto la differenza di latitudine sarà maggiore, e quanto più le latitudini saranno elevate. Intanto, siccome per la differenza di latitudine relativa al cammino fatto in un giorno, fino alle latitudini non maggiori di 50°, questo metodo è tollerabile, così abbiamo stimato esibirne la formola *differenza di longitudine* $= \frac{\textit{appartamento}}{\cos \textit{lat media}}$.

171. Questo metodo, pur generalmente seguito, è al certo meno agevole di ciascuno de' due metodi rigorosi da noi indicati (168, 169). Meglio sarebbe, amando la brevità, usare il seguente metodo, il quale ne sorprende come fin oggi non sia stato da nessuno avvertito, nè d'alcuno adoperato nella pratica, per quanto almeno è a nostra notizia.

Si ritenga per valore medio del minuto dell'equatore su tutti i paralleli pe' quali si è passato dalla latitudine della partenza sino alla latitudine dell'arrivo, per la navigazione di un giorno, quel valore che esso ha sul parallelo della latitudine media, e questo, che da ora innanti chiameremo *valore medio* del minuto dell'equatore, moltiplicato per l'appartamento darà la differenza di longitudine. Vale a dire, si dovrà prendere la differenza a colpo d'occhio sulla tavola delle latitudini crescenti tra le parti corrispondenti alla latitudine media, e quelle corrispondenti alla latitudine di un minuto prossimamente maggiore, e questa differenza moltiplicare per l'appartamento; per la quale operazione, tal valore medio diremo ancora *differenza media*, e perciò stabiliremo *differenza di longitudine* $=$ *appartamento* $\times$ *differenza media*.

172. Di questo nuovo metodo potremo ancora con maggior ragione avvalerci, allorchè trattasi di aver navigato per parallelo (164), ed in vece di *diff. di longitudine* $= \frac{appartamento}{\cos\ latitudine}$, fare per le ragioni di sopra esposte *differenza di longitudine* $=$ *appartamento* $\times$ *differenza media*.

173. *Conchiusione del punto stimato*. Costruito adunque il triangolo stimato, procederemo come si è detto alla conoscenza della differenza di longitudine; e con ciò, per la differenza di latitudine di già determinata (159), avremo ottenuto il *punto stimato;* perciocchè tali due differenze di latitudine e di longitudine saranno le due coordinate al parallelo ed al meridiano del punto di partenza preso per origine delle ascisse. Essendosi però generalmente convenuto, per comodo, risguardare come origine delle ascisse, l'intersecazione del primo meridiano con l'equatore; siano esse sferiche considerandole su di un globo, siano piane considerandole su di una superficie piana in virtù di una proiezione per isviluppo; bisognerà riferire il punto dell'arrivo non già agli

assi delle coordinate relativi al punto della partenza; ma sì bene a quelli di convenzione (88 e 104). E però, alla latitudine della partenza si dovrà aggiugnere o torre la differenza di latitudine avuta, secondochè siasi navigato verso il polo, o verso l'equatore per esprimere la latitudine *dell' arrivo:* ed analogamente a ciò, alla longitudine della partenza si dovrà aggiugnere o torre la differenza di longitudine, secondo siasi proceduto verso Est, o verso Ovest, per indicare la longitudine *arrivata.* E quì è necessario richiamare alla mente che quando la differenza di latitudine o di longitudine sia maggiore della latitudine o longitudine della partenza e di specie opposta, quella dell' arrivo dovrà esser negativa, ovvero di specie opposta a quella della partenza. Cioè, chiamando d la differenza di latitudine o di longitudine che sia, noi abbiamo in tal caso le due equazioni $-l'=l-d$, e $-P'=P-d$; o sia, per la latitudine dell' arrivo $l'=d-l$, e per la longitudine $P'=d-P$.

174. E riepilogando diremo, che per determinare il punto stimato sono in tutto sei gli elementi da considerare; 1.° la differenza di latitudine; 2.° l'appartamento; 3.° l'azzimutto costante o sia l'angolo del rombo; 4.° la distanza navigata; 5.° la differenza di latitudini crescenti; 6.° la differenza di longitudine: de' quali sei elementi se due saranno noti conosceremo ancora gli altri, perciò 15 sarebbero i problemi da risolvere, relativamente alle corse oblique, quando dalla riduzione delle rotte, o da altro mezzo, si potessero avere due elementi qualunque dei sei che ne abbisogna determinare; ma siccome i due elementi che per la soluzione di tal problema ne si offrono dalla riduzione delle rotte sono costantemente i primi due, cioè la differenza di latitudine e l'appartamento, così pensiamo occuparci di questo caso solamente, e risguardare gli altri come utili esercizi di trigonometria piana: sia che facciasi uso delle tavole logaritmiche, sia che si adoperi il quadrante o altro mezzo grafico.

175. *Esempio 1.°*

Siasi partito dalla latitudine 40° 50′ N e longitudine 10° 17′ 25 E di Parigi: dopo aver fatto diverse rotte (149), e, per la riduzione fattane (154) aver ottenuto gli appartamenti in miglia 13,5 S e 5,3 E, (*fig. 24*) si domanda il punto dell'arrivo.

Per trovare il rombo.

$$\tan rombo = \frac{appartamento}{diff.\ latitudine}$$

log appartamento 5,3 = 0.7242759
colog. diff. latitudine 13,5 = 8.8696662

log. tan rombo = 9.5939421
Rombo navigato S 21° 26′ 04″,57 E

Per la distanza navigata.

$$Distanza\ navigata = \frac{diff.\ latitudine}{\cos rombo}$$

log. diff. latitudine 13,5 = 1.1303338
colog cos rombo, 21°26′04″,57 = 0.0311272

log distanza navigata = 1.1614610
Distanza navigata 14,5

Per la latitudine dell' arrivo.

latitudine partita	40° 50′ 00	N
differenza latitudine	13. 30	S
Latitudine arrivata	40 36. 30	N

Per la differenza latitudini crescenti.

per la latit. partita 40.50.00 = 2688′,37
per la latit. arrivata 40.36.30 = 2670 ,65

diff. latitudini crescenti = 17 ,72

Per la latitudine media.

latitudine partita	40°.50′
latitudine arrivata	40 .36 .30
	81 .26 .30
latitudine media	40 .43 .15

differenza media delle lat. crescenti 1,32

1.° Metodo per la diff. di longitudine.

$$diff.\ long. = \frac{diff\ lat\ crescenti \times appartamento}{diff.\ latitudine}$$

$$= \frac{17,7 \times 5,3}{13,5} = 6',95637$$

2.° Metodo.

diff. long = tan *rombo* × *diff. lat. crescenti*

log tan 21° 26′ 04″,57 = 9.5939421
log. diff. lat. crescenti 17,72 = 1.2484637

log diff. longitudine = 0.8424058
Differenza di longitudine 6,95674

3.° Metodo.

$$diff.\ long = \frac{appartamento}{\cos lat.\ media}$$

log appartamento 5,3 = 0.7242759
colog cos lat. media 40° 43′ 15″ = 0.1203897

log diff longitudine = 0.8446656
Differenza di longitudine 6,99303

4.° Metodo.

diff long = *appartamento* × *diff media*

= 5,3 × 1,32 = 6,996

Per la longitudine dell' arrivo.

longitudine della partenza	10° 17′ 25″	E
differenza di longitudine	6 57	E
Longitudine dell' arrivo	10 24 22	E

Punto arrivato stimato.

Latitudine 40° 36′ 30″ N
Longitudine 10 24 22 E Parigi

176. *Esempio 2.°*

Essendo partiti dalla latitudine 68° 17′ 30 N e longitudine 160° 23′ 17″ O di Parigi, sonosi fatte diverse rotte (150), le quali ridotte (155) hanno dato miglia 11,8 N di differenza di latitudine, e miglia 33,6 E di appartamento; si domanda la latitudine e la longitudine dell'arrivo.

Per trovare il rombo.

$$\tan \textit{rombo} = \frac{\textit{appartamento}}{\textit{diff. latitudine}}$$

log appartamento 33,6 = 1.5263393
colog diff. latitudine 11,8 = 8.9281180
log tan rombo = 0.4544573
Rombo navigato 70° 38′ 57″,17

Per la distanza navigata.

$$\textit{Distanza navigata} = \frac{\textit{diff. latitudine}}{\cos \textit{rombo}}$$

log diff. latitudine 11.8 = 1.0718820
colog cos rombo 70° 38′ 57″,17 = 0.4797119
log distanza navigata = 1.5515939
Distanza navigata 35,6122

Per la latitudine dell'arrivo.

latitudine partita	68°	17′	30″	N
differenza latitudini		11	.48	N
Latitudine arrivata	68°	29′	18	N

Per la differenza latitudini crescenti.

per la latit. partita 68° 17′ 30″ = 5677,83
per la latit. arrivata 68 29 18 = 5709,88
diff. latitudini crescenti 32,05

Per la latitudine media.

latitudine partita	68	17	30
latitudine arrivata	68	29	18
	136	46	48
latitudine media	68	23	24

differenza media delle lat. crescenti 2,72

1.° Metodo per la diff. di longitudine.

$$\textit{diff. long} = \frac{\textit{diff. lat crescenti} \times \textit{appartamento}}{\textit{diff. latitudine}} = \frac{32,05 \times 33.6}{11,8} = 91,261$$

2.° Metodo.

diff. long = tan *rombo* × *diff. lat. crescenti*

log tan rombo 70° 38′ 57,17 = 0.4544573
log diff. lat. crescenti 32,05 = 1.5058280
log diff. longitudine = 1.9602853
Differenza di longitudine 91,261

3.° Metodo.

$$\textit{diff. long} = \frac{\textit{appartamento}}{\cos \textit{lat. media}}$$

log appartamento 33,6 = 1.5263393
colog cos lat media 68° 23′ 24″ = 0.4338138
log diff longitudine = 1.9601531
Differenza di longitudine 91,233

4.° Metodo.

diff long = *appartamento* × *diff media*
= 33,6 × 2,72 = 91,392

Per la longitudine dell'arrivo.

longitudine della partenza	160°	23′	17″	O. P.
differenza di longitudine	1	31	24	E.
Longitudine dell'arrivo	158	51	53	O.

Punto arrivato stimato.

Latitudine 68° 29′ 18″ N
Longitudine 158 51 53 O Parigi

177. *Esempio 3.°*

Avendo 74° 28′ 20″ N di latitudine, e 80° 13′ 43″ O di longitudine dal meridiano di Parigi pel punto di partenza, ed avendo fatto diverse rotte (151) sonosi ridotte (157) ed avuto miglia 85,7 di differenza di latitudine al sud, e miglia 52,2 di appartamento all'ovest (*fig. 26.*) si chiede il punto dell'arrivo.

Per trovare il rombo.

$$\text{tan } rombo = \frac{appartamento}{diff.\ latitudine}$$

log appartamento 52,2 = 1.7176705
colog diff. latitudine 85,7 = 8.0670192
log tan rombo = 9.7846897
Rombo navigato 31° 20′ 44″,367

Per la distanza navigata.

$$Distanza\ navigata = \frac{diff.\ latitudine}{\cos rombo}$$

log diff. latitudine 85.7 = 1.9329808
colog cos rombo 31° 20′ 44″,367 = 0.0685195
log distanza navigata = 2.0015003
Distanza navigata 100,346

Per la latitudine arrivata.

latitudine partita	74°	28′	20″	N
differenza latitudini	1	25	42	S
Latitudine arrivata	73	02	38	N

Per la differenza latitudini crescenti.

per la latit. partita 6850′,04
per la latit. arrivata 6543 ,44
diff. latitudini crescenti. . . . 306 ,60

Per la latitudine media.

latitudine partita	74	28	20
latitudine arrivata	73	02	38
	147	30	58
latitudine media	73	45	29

differenza media delle lat. crescenti 3,58

1.° Metodo per la diff. di longitudine.

$$diff.\ long = \frac{diff\ lat\ crescenti \times appartamento}{diff.\ latitudine} = \frac{306{,}6 \times 52{,}2}{85{,}7} = 186{,}75$$

2.° Metodo.

diff. long = tan *rombo* × *diff. lat. crescenti*

log tan 31° 20′ 44″,367 = 9.7846897
log diff. lat. crescenti 306,6 = 2.4865722
log diff. longitudine = 2.2712619
Differenza di longitudine 186,75

3.° Metodo.

$$diff.\ long = \frac{appartamento}{\cos lat.\ media}$$

log appartamento 52,2 = 1.7176705
colog cos lat media 73° 45′ 29″ = 0.5533168
log diff longitudine = 2.2709873
Differenza di longitudine 186,633

4.° Metodo.

diff long = *appartamento* × *diff media*
= 52,2 × 3,58 = 186,876

Per la longitudine dell' arrivo.

longitudine della partenza	80°	13′	43″	O. P.
differenza di longitudine	3	06	45	O.
Longitudine dell' arrivo	83	20	28	O.

Punto arrivato stimato.

Latitudine 73 02 38 N
Longitudine 83 20 28 O Parigi

178. Chi nella pratica si contentasse adottare il nostro metodo 4.° ridurrebbe la ricerca del punto dell'arrivo al seguente

Tipo di calcolo pel punto stimato.

179. *Esempio 1.°*

diff latitudine (155)	13′ 30″ S	appartamento	5,3
lat. partita	40 50 00 N	diff media	1,32
lat arrivata	40 36 30 N		396
			660
		diff. di long.	6,996 = 0 6′ 59″ E
		long partita	10 17 25 E
		longitudine arrivata	10 24 24 E

180. *Esempio 2.°*

diff latitudine (156)	11′ 48″ N	appartamento	33,6
lat. partita	68 17 30 N	diff media	2,72
lat arrivata	68 29 18 N		672
			2352
			672
		diff. di long.	91,392 = 1° 31′ 23″ E
		long partita	160 23 17 O
		longitudine arrivata	158 51 54 O

181. *Esempio 3.°*

diff. latitudine (157)	1° 25′ 42″ S	appartamento	52,2
lat. partita	74 28 20 N	diff media	3,58
latitudine arrivata	73 02 38 N		4176
			2610
			1566
		diff di long.	186,876 = 3° 06′ 52″ O
		long partita	80 13 43 O
		longitudine arrivata	83 20 35 O

182. La riduzione delle rotte nel modo di già eseguito (155, 156, 157), racchiude però un errore che se non riesce sensibile nelle latitudini poco avanzate, e quando pure in latitudini molto elevate sia piccola la dif-

ferenza di latitudine da un giorno all' altro, è intanto abbastanza significante per tenersene conto, allorchè siasi percorsa una gran differenza di latitudine tra paralleli meno di 30° distanti dal polo. Questo errore si è quello derivante dal compensare gli appartamenti *est* con gli appartamenti *ovest* indistintamente, laddove fossevi molta differenza tra la latitudine de' primi e quella de' secondi; imperciocchè avendo allora il miglio un differente valore su' diversi paralleli il compenso è erroneo. Nel qual caso stimiamo consigliare che ad ogni cangiar di rotta, o meglio ad ogni ora, si determini il punto stimato; o ciò che è lo stesso, alla riduzione delle rotte si dia la seguente forma:

Miglia.	Rotta corretta	N.	S.	E.	O.	Latitudini successive.	Differ. media.	Diff. di longitudine	
								E.	O.
37,4	N 47°41'E	25,0	»	27,7	»	76 23 30	4,18	115,786	»
60,3	N 32 00 E	51,1	»	31,9	»	77 14 36	4,39	140,041	»
42,7	N 7 00 O	42,4	»	»	5,2	77 57 00	4,66	»	24,232
38,5	N 50 00 O	24,7	»	»	29,5	78 21 42	4,88	»	143,960
178,9		143,2	»	59,6	34,7			255,827	168,192
								168,192	
								87,635	

Se in latitudine così avanzata si facesse il punto stimato all' uso ordinario si avrebbe un appartamento ridotto di miglia 24,9 E, ed essendo quì, com' è ben chiaro, la latitudine partita 75° 58' 30'', si sarebbe avuto per *differenza media* 4,51, come quella che nelle latitudini crescenti passa tra 77° 10', e 77° 11', giacchè la latitudine media è di 77° 10' 06''. Laonde facendo $24{,}9 \times 4{,}51$ si avrebbe una differenza di longitudine di $112'{,}299 = 1°\ 52'\ 18''$; mentre essa non è che di soli $87'{,}635 = 1°\ 27'\ ,\ 38''$. Vale a dire, lasciando le minuzie, si avrebbe in tal caso un errore di longitudine di 25', derivante solo dal metodo di ridurre le rotte, ed indipendentemente dalla maggiore o minore esattezza del metodo che si vorrebbe usare nella circostanza per determinare il punto stimato.

183. Il punto stimato intanto è evidente non doversi ritenere come esatto, poichè poggiato sopra elementi somministrati dal loche e dalla bussola, delle imperfezioni de' quali strumenti si è già detto abbastanza. In fatti il punto dicesi *stimato corretto*, allorquando essendosi ottenuta la latitudine osservata, si sarà proceduto a certe correzioni, di cui qui appresso parleremo. E solamente al *punto osservato*, cioè a quello che si ha direttamente dalle osservazioni astronomiche, debbono i marini affidarsi con probabilità prossima alla certezza; perocchè il dubbio rimane solo nel grado di espertezza per le osservazioni e pel calcolo.

LEZIONE XVIII.

Della correzione del punto stimato mercè la latitudine osservata.

184. Avutasi dall'osservazione e dal calcolo la latitune vera della nave, come a suo luogo diremo, il primo e principale uso che debbono farne i marini si è quello di correggere il punto stimato; cioè pervenire col mezzo di essa a determinare una longitudiue meglio approssimata alla vera; allorchè questa per una ragione qualunque non possa direttamente ottenersi dalle osservazioni astronomiche.

185. Noi abbiamo dal triangolo stimato qfg

$$l \overset{\sim}{+} l' = c \times \cos z,\ c = \frac{a}{\text{sen}\, z},\ \text{P} = (\Lambda' \sim \Lambda'') \tan z,$$

ponendo, distanza navigata $= c$
rombo navigato $= z$
diff. di latitudine $= l \overset{\sim}{+} l'$

diff. di latitudine crescenti $= (\Lambda' \overset{\sim}{+} \Lambda'')$
diff. di longitudine $=$ P
appartamento $= a$

Da tali tre equazioni che risolvono il problema del *punto* è ben manifesto non potersi attendere alcuna esattezza, ma solo un'approssimazione grossolana, per quanto inesatti sono i dati dal loche e dal compasso di rotta forniti, dall'uso de' quali essi tutti traggono origine.

186. Allorchè però si è avuta la latitudine dell'arrivo con quella certezza che le osservazioni astronomiche ci somministrano, sarà cosa agevole dare ancora agli altri elementi del calcolo un maggior grado di approssimazione; comechè non si possa a sufficiente esattezza pervenire, se non coll'ottenere la longitudine direttamente dalle osservazioni astronomiche.

187. Or con la latitudine osservata dell'arrivo si sarà avuto con precisione la differenza di latitudine, ma noi abbiamo $l \underset{+}{\sim} l' = c \times \cos z$; adunque se tra la latitudine stimata e l'osservata si rinviene una differenza sensibile, la quale viene fissata a $\pm 5'$, essendo questa all'incirca la lunghezza del raggio dell'orizzonte dal cassero di un bastimento, dev'essa necessariamente derivare da errore commesso sopra uno de' due fattori, o sopra entrambi.

188. Ma quando z fosse un angolo di pochi gradi, un errore sulla valutazione di esso, non può arrecare alterazione sensibile al suo coseno; essendo i coseni allora pressochè tutti eguali al raggio, che nel presente caso è rappresentato dall'ipotenusa; mentre al contrario essendo c ipotenusa poco maggiore del cateto $l \underset{+}{\sim} l'$, o in altri termini, essendo il cammino fatto, quasi interamente per differenza di latitudine, ogni piccolo errore sulla sua estensione influisce poco meno che totalmente sulla differenza di latitudine. Quindi in tal caso bisogna attribuire l'errore alla valutazione del cammino, tener per vero il rombo, e con la vera differenza di latitudine costruire un nuovo *triangolo ridotto*, e indi il *triangolo stimato corretto*.

189. Se viceversa l'angolo del rombo è molto grande, ogni piccolo errore su di esso, arreca una gran differenza sul suo coseno; mentre la distanza, essendo in tal caso assai divergente dalla differenza di latitudine, non può che lievemente influire sull'errore che si è su di questa verificato, o in altri termini: trovandosi la distanza prossima alla posizione parallela all'appartamento, ogni errore da essa contenuto influirà quasi per intero sull'appartamento, ma pressochè niente sulla dif-

ferenza di latitudine. Perciò in questo secondo caso bisogna attribuire al rombo l'errore verificato sulla differenza di latitudine, tener per vera la distanza, e con questa e con la vera differenza di latitudine costruire un nuovo triangolo ridotto, e poi il *triangolo stimato corretto.*

190. Ed in termini generali diremo che essendo $l \underset{+}{\sim} l' = c \times \cos z$, terremo il fattore c per erroneo, quando cos z si accosta all'unità, e così passeremo a correggere l'appartamento, che deve condurci alla conoscenza della differenza di longitudine; e quando all'opposto il suo valore si allontana molto dall'unità, terremo cos z per erroneo, e c per vero.

191. Da tutto ciò siamo egualmente condotti a conchiudere, che quando z sia di un valore medio tra i due estremi proposti, fa d'uopo attribuir l'errore a tutti e due i fattori; e però si dovrà adottare ciascuna delle due ipotesi, e trovare un appartamento col rombo e con la vera differenza di latitudine, ed un altro appartamento con la distanza e con la vera differenza di latitudine; e tener per appartamento corretto quello derivante dalla semisomma di essi due.

Finalmente con questo e con la differenza di latitudine vera si procederà alla determinazione del triangolo ridotto; e poscia regolarmente a quella del triangolo stimato corretto.

192. Guidati da tali principî, si è generalmente adottato di usare la *prima correzione* (188) allorchè l'angolo del rombo è minore di due quarti di vento, cioè minore di 22° 30′; la *seconda* (189) se è maggiore di sei quarti, o sia maggiore di 67° 30′; e la *terza* (191), allorchè il rombo è tra questi limiti, cioè maggiore di 22° 30′ e minore di 67° 30′.

193. *Esempio 1.°*

Nel caso dell' esempio 1.° (175) del punto stimato, siasi avuta per *latitudine osservata* 40° 29′ 00 N, o sia una latitudine vera di 7′ 30″ meno della stimata; in guisa che la vera differenza di latitudine sia 21′. Essendo l' angolo del rombo di 21° 26′, cioè minore di 22° 30′, dovrà aver luogo la *prima correzione* (188); cioè, degli elementi del triangolo ridotto si dovrà ritener per vero il solo rombo, e con questo e con la vera differenza di latitudine procedere alla costruzione di un nuovo triangolo, che diremo *triangolo ridotto corretto*. E per le equazioni

$mn = qm \times \tan q$, e $qn = \frac{qm}{\cos q}$, sarà

appartamento = *diff latitudine* × tan *rombo*, e *distanza* = $\frac{\textit{diff latitudine}}{\cos \textit{rombo}}$

log. diff. latitudine 21 = 1.3222193
log tan 21° 26′ 04″,57 = 9.5939421
log appartamento = 0.9161614
appartamento 8,24444 E
diff. media 1,31
824
2472
824
diff. long. 10,7944 = 10′ 47″,66 E
longitudine partita 10° 17 25 E
longitudine arrivata 10 28 12 ,66 E

log. diff. latitudine 21 = 1.3222193
colog cos 21 26 04,57 = 0.0311272
log distanza navigata = 1.3533465
distanza navigata 22,5604

Punto stimato corretto.

Latitudine 40° 29′ 00″ N
Longitudine 10 28 13 E

194. *Esempio 2.°*

Supponghiamo che nell' esempio 2.° (176) si fosse ottenuta la latitudine osservata 68° 37′ 18″ N, cioè 8′ più della stimata, per correggere il triangolo ridotto, si avrebbe dovuto ritenere la distanza per vera, essendo l' angolo del rombo maggiore di 67° 30′; cioè si sarebbe praticata la *seconda correzione* (189), e dall' equazione $\cos q = \frac{qm}{qn}$ si sarebbe avuto l' angolo del rombo N 56° 12′ 28″,7 E e dall' altra $mn = qm \times \tan q$, l' appartamento 29,6 e però

latitudine 68° 37′ 18″ N
longitudine 159 02 46 O Parigi.

195. *Esempio 3.°*

Siasi ottenuta dalle osservazioni astronomiche, nella circostanza dell' esempio 3.° (177) la latitudine di arrivo di 72° 52′ 38″ N, cioè 10 miglia minore della stimata, per la qual cosa la vera differenza di latitudine sia di miglia 95,7. Con questa e col rombo navigato S 31° 20′ 44″,367 O si avrà un primo *appartamento ausiliario* di miglia 58,291 mediante l'equazione *appartamento* = tan *rombo* × *diff. latitudine*. Indi con la stessa differenza di latitudine 95,7 e con la distanza navigata 100,346 si troverà un secondo appartamento ausiliario 30,027 con l'equazione *appartamento* $= \sqrt{(\textit{distanza})^2 - (\textit{diff. lat.})^2}$. La semisomma do' due appartamenti così rinvenuti si avrà per appartamento vero, 44,159. Finalmente con questo e con la vera differenza di latitudine si costruirà un nuovo triangolo ridotto, nel quale avremo l'angolo del rombo 24° 46′ 12″,3 e la distanza navigata di miglia 105,387; e perciò latitudine arrivata 72° 52′ 38″ N, e longitudine 82° 50′ 55″ O. di Parigi.

196. Nella *terza correzione* suole spesso verificarsi un caso che merita un' avvertenza speciale.

Fatta la differenza tra la latitudine partita e la latitudine osservata, quando la si rinviene maggiore della distanza navigata, riesce impossibile trovare il secondo appartamento dei due, la cui semisomma deve fornirci quello che dobbiamo poi ritener per vero; essendo cosa assurda costruire un triangolo rettilineo rettangolo, con un cateto maggiore dell'ipotenusa. Sia ciò cagionato da una corrente pressochè in poppa (141) o da altra ragione qualunque, il fatto dimostra in tal caso aver certamente valutata la distanza meno del vero; e però miglior consiglio sarà proceder prima ad approssimar la distanza, e posciá a determinare l'appartamento che dovrà aversi per vero.

A tale oggetto con la vera differenza di latitudine, e col rombo navigato si troverà una *distanza;* con essa vera differenza di latitudine e con l' appartamento si troverà una seconda *distanza.* La semisomma di queste due si terrà per distanza navigata del triangolo ridotto; indi si eseguirà regolarmente quanto abbiamo già detto (191) per la terza correzione.

Esempio.

Nell' esempio 3.° (195) la latitudine vera siasi avuta dall' osservazione astronomica 72° 42′ 38″ N, cioè miglia 20 meno della stimata, in guisa che la vera differenza di latitudine sia di 105,7 maggiore della distanza navigata 100,346. In questo caso non sarà possibile trovare il secondo appartamento ausiliare onde procedere alla correzione del triangolo ridotto: bisognerà dunque con la vera differenza di latitudine 105,7 e col rombo navigato S 31° 20′ 44″,367 O trovare una distanza 123,764; con la stessa differenza di latitudine 105,7 e con l'appartamento 52,2 ottenere una seconda distanza 117,887, la semisomma di queste due distanze ritener per distanza navigata 120,825. Indi con la vera differenza di latitudine 105,7 e col rombo si avrà un primo appartamento ausiliario 64,382; e con la stessa differenza di latitudine vera 105,7 e con la menzionata distanza 120,825 si otterrà il secondo appartamento ausiliario 58,534; la semisomma 61,458 di tali due appartamenti, sarà quello che con la differenza di latitudine 105,7 ne porrà in grado di costruire il triangolo ridotto corretto; nel quale avremo il rombo navigato S 30° 10′ 31″24 O, e la distanza 122,268 miglia. E quindi in conchiusione, latitudine arrivata 72° 42′ 38″ N, e longitudine 83° 51′ 17″ O.

LEZIONE XIX.

Della costruzione de' mappamondi.

197. Essendosi ricavati dagli elementi offerti dal giornale di navigazione o dalle osservazioni astronomiche la latitudine e la longitudine del punto di arrivo, sono indispensabili i mezzi atti a farci rilevare, quanto cammino ne resta a percorrere e per quale direzione, onde giungere alla meta. E tali mezzi debbono necessariamente consistere a rappresentare nel miglior modo possibile la situazione de' diversi luoghi sulla superficie del globo, o almeno in modo che conservino i rapporti medesimi, che hanno tra loro, e relativamente alla superficie della terra. Questa però non essendo sviluppabile, perchè quasi sferica, non può su di un piano rappresentarsi la disposizione che i luoghi hanno tra loro, che alterandone più o meno le distanze, l'estensione delle superficie, i valori angolari delle linee, la configurazione delle coste, ec. Quindi secondo i diversi usi cui vengono destinate le carte sulle quali si rappresenta qualche parte più o meno grande della superficie terrestre, si segue un metodo diverso, che meglio meni al proprio scopo.

198. Se si voglia considerare l'estensione della superficie terrestre che le carte rappresentano, distinguonsi esse in *mappamondi*, *carte generali* o *corografiche*, e *carte topografiche*; ma considerate sotto l'aspetto del metodo impiegato a costruirle, si distinguono in carte di *proiezione prospettica*, e di *proiezione per isviluppo*. Le prime si usano solo per la costruzione de' mappamondi, e le seconde per quella delle carte generali, corografiche, topografiche ed *idrografiche*.

E dovendo noi interessarci in particolar modo di queste ultime ci contenteremo dar solo un breve cenno delle prime, per quanto basti a dimostrare l'impossibilità di servirci delle medesime nelle occorrenze di mare, ed il bisogno di una proiezione tutta diversa.

199. *De' Mappamondi.* I mappamondi siccome furono da Tolomeo immaginati consistono nella prospettiva di un emisfero sovra un piano che passa per lo centro della sfera, situando l'occhio all'estremo del

raggio di essa ch'è perpendicolare al piano medesimo, e supponendo trasparenti il piano e l'emisfero opposto. Tale prospettiva dicesi *proiezione stereografica*.

200. *Della proiezione stereografica*. Or qualunque sia la posizione di un cerchio tracciato sulla sfera rispetto all'occhio situato in un punto qualunque della superficie di essa, la prospettiva di tal cerchio sul piano perpendicolare al raggio menato all'occhio, sarà similmente un cerchio: eccetto il solo caso in cui la circonferenza passi per l'occhio, chè allora la sua proiezione sarà una retta, com'è ben chiaro.

In fatti: sia NN′ (*fig. 30*) un cerchio tracciato sulla sfera AOBQ, e sia l'occhio situato in O. Pel punto P polo della calotta sferica NN′P, pel centro della sfera C, e per l'occhio O si faccia passare un piano il quale genererà il cerchio massimo AOBQ che sarà perpendicolare al piano NN′ e passerà per l'occhio; e finalmente sia AB la proiezione del *piano secante*, cioè del piano perpendicolare al piano AOBQ, ed al raggio OC, *asse ottico*.

Il piano secante AB, taglierà il cono obliquo NN′O formato dalle visuali menate da O a tutti i punti della circonferenza NN′, e che addimandasi cono ottico, formando la sezione nn' ch'è la prospettiva domandata, e che abbiamo assunto dimostrare essere un cerchio. Or l'angolo $N = \frac{1}{2}$ AN′ $+ \frac{1}{2}$ AO, ed $n' = \frac{1}{2}$ AN′ $+ \frac{1}{2}$ OB, ma nelle due equazioni i secondi membri sono eguali, dunque $N = n'$, e però la sezione nn' nel cono obliquo NN′O che ha per base un cerchio, è succontraria o antiparallela alla base NN′, quindi sarà ancora essa sezione nn' un cerchio.

201. Ciò posto sia $PN = \Delta$ distanza del cerchio dal suo polo P, l'arco $PQ = D$, distanza del polo P del cerchio da Q *polo della proiezione,* come diametralmente opposto all'occhio; $ni = \rho$ *raggio della prospettiva*, $Ci = \alpha$ distanza de' due centri C ed i. Per aver questi elementi la costruzione è molto semplice, imperciocchè dato il cerchio NN′ da proiettarsi sul piano AB, dall'occhio O si menino le rette ON, ON′ che taglieranno il diametro AB ne' punti n, n', i quali daranno $n\,n'$ diametro della proiezione, la metà del quale darà i cen-

tro di essa. E siccome questa costruzione cessa di esser possibile quando il cerchio NN′ è situato in guisa, che le rette ON, ON′ riescano tanto divergenti da non potersi comprendere nel foglio i punti n, n', così per rinvenire i valori di α, e di ρ porremo

$$N'Q = N'P + PQ = D + \Delta\text{, ed } NQ = D - \Delta, CO = 1, Cn = \tan COn, Cn' = \tan COn'$$

ed avremo

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(Cn' + Cn)$$
$$\rho = \tfrac{1}{2}(Cn' - Cn)$$

$$\left.\begin{matrix} Cn' = \tan \tfrac{1}{2}(D+\Delta) \\ Cn = \tan \tfrac{1}{2}(D-\Delta) \end{matrix}\right. \text{ e però } Cn' \pm Cn = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(D+\Delta)}{\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)} \pm \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(D-\Delta)}{\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)},$$

$$Cn' + Cn = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta) + \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(D-\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)}{\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)}$$

$$= \frac{\text{sen}[\tfrac{1}{2}(D+\Delta) + \tfrac{1}{2}(D-\Delta)]}{\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)} = \frac{\text{sen}\,D}{\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)},$$

e similmente $\quad Cn' - Cn = \dfrac{\text{sen}\,\Delta}{\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)}$;

quindi sostituendo sarà

$$\alpha = \frac{\text{sen}\,D}{2\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)} = \frac{\text{sen}\,D}{\cos D + \cos\Delta}$$

$$\rho = \frac{\text{sen}\,\Delta}{2\cos\tfrac{1}{2}(D+\Delta)\cos\tfrac{1}{2}(D-\Delta)} = \frac{\text{sen}\,\Delta}{\cos D + \cos\Delta}$$

donde si deduce

$$\alpha : \rho :: \text{sen}\,D : \text{sen}\,\Delta$$

202. Queste equazioni che racchiudono tutta la teorica delle proiezioni stereografiche, ci fanno chiaramente vedere che per proiettare un cerchio dato in una sfera, basterà trovare i valori di D e Δ, i quali emergono dalla posizione medesima che il dato cerchio ha nella sfera. Ma noi senz'arrestarci a mostrarne l'applicazione a' diversi casi che possono darsi nel proiettare un mappamondo, accenneremo solo quello della proiezione di un emisfero sul primo meridiano, onde formarcene un'idea.

203. Sia PP′ (*fig. 31*) l'asse de' poli, sarà l'equatore proiettato secondo il diametro OQ. Si divida il cerchio P′OPQ, per esempio di 15 in 15°, numerandoli siccome si conviene a' gradi di latitudine, cioè da 0° fino

a 90° in ciascuno degli emisferi rispetto all'equatore OQ e sul primo meridiano sino ai poli P, e P'; e per ogni punto di divisione si faccia la stessa operazione che ora faremo pe' due punti N, N'.

Per proiettare i paralleli s'immagini l'occhio in O, ovvero che PP' sia la proiezione del piano secante: si tirino le rette ON ed ON' che tagliano l'asse PP' ne' punti M ed M', sarà MM' il diametro della proiezione del cerchio NN'; e quindi descritto l'arco NMN' questo rappresenterà il semiparallelo che deve nella carta contenersi.

Anzi senz'avvalerci del punto M' che può trovarsi molto lontano, possiamo far passare un arco di cerchio pe' tre punti N, M, ed N'; e così si costruiranno tutti i paralleli dall'una e dall'altra parte dell'equatore simmetricamente.

204. Per costruire poi i meridiani della carta possiamo servirci della stessa divisione già fatta nella circonferenza del primo meridiano, sol che supponghiamo l'occhio situato in P' ed OQ per piano secante.

Così volendo costruire il semimeridiano che passa per 15° di longitudine, da P' si meni una retta al punto di divisione 15° essa taglierà la OQ in un punto *f* questo sarà il terzo punto che ne abbisogna, essendo già noti gli altri due punti P e P', imperciocchè i meridiani debbono tutti passare pe' poli. Or per questi tre punti P, *f*, e P' si faccia passare l'arco P *f* P' questo darà la proiezione richiesta del semimeridiano a 15° di longitudine.

205. Costruita così la *rete* si potranno situare sulla carta i luoghi secondo le rispettive latitudini e longitudini, e si sarà formato il mappamondo proposto sul piano del primo meridiano, il quale rappresenterà il piano secante; ed il punto dell'equatore a 90° di longitudine dinoterà la situazione dell'occhio in così fatta proiezione prospettica.

206. I difetti che presenta la proiezione stereografica sono 1.° Che i gradi del cerchio massimo che passa per l'occhio, che nel caso da noi esposto è l'equatore, non sono tutti eguali, mentre sullo sferico lo sono. 2.° Che i gradi de' paralleli non serbano tra loro gli stessi rapporti che hanno sulla sfera. 3.° Finalmente, che la superficie di un emisfero

la quale eguaglia due cerchi massimi, viene proiettata nella metà dello spazio, cioè in un solo cerchio massimo; e senza che perciò le parti di esso corrispondano alla metà del vero relativamente al raggio adottato; giacchè le parti prossime al contorno ne sono maggiori, e quelle vicine al centro ne sono minori: in somma il rapporto delle superficie è grandemente alterato.

207. *Della proiezione di Lorgna*. Volendo però costruire una carta nella quale il rapporto delle superficie sia perfettamente conservato, senza pertanto arrecare sensibile alterazione alla configurazione delle regioni terrestri, possiamo ricorrere a quella del Cav. Mario Lorgna.

208. Abbiamo dalla geometria che la superficie di ogni calotta sferica è uguale al cerchio che ha per raggio la corda che dal suo polo va ad un punto della circonferenza della base: e perciò esibendo tal cerchio come proiezione della calotta, avremo che l'area di una data superficie sferica è uguale a quella della sua proiezione.

209. Chiamiamo R il raggio di un emisfero di cui vogliasi formare un mappamondo, e sia r il raggio del cerchio che deve rappresentarlo, e che uguaglia l'emisfero in superficie. Le aree saranno dinotate da $2\pi R^2$, πr^2, e poichè queste sono eguali avremo $r^2 = 2R^2$

$$r = R\sqrt{2}$$

$$R = \tfrac{1}{2} r\sqrt{2}$$

le quali espressioni, com'è chiaro daranno r tostochè è noto R, e reciprocamente.

210. Si tracci adunque un cerchio ad arbitrio per rappresentare la proiezione dell'emisfero: la sfera cui questo si riferisce avrà per raggio $\frac{1}{2} r \sqrt{2} = R = 0{,}7071 \times r$. E se dividesi r in 1000 parti eguali la sfera avrà per raggio 707 di queste parti.

211. Or sia CA = R raggio della sfera (*fig. 32*), A il polo, M'M un parallelo la cui distanza dal polo è l'arcò AM = Δ complemento della

latitudine. Abbiamo la superficie della calotta $M'AM = 2\pi Rk$, facendo la freccia $AB = k$; e ponendo il raggio della proiezione del parallelo cioè $CI = \rho$, la superficie di questo sarà dinotata da $\pi\rho^2$. Per fare che queste due superficie siano eguali, bisognerà che sia $\rho^2 = 2Rk$, cioè sarà d'uopo che ρ sia media proporzionale tra 2R diametro della sfera, e k, o sia AB altezza della calotta sferica M'AM; ma a questa condizione corrisponde la corda AM, dunque il raggio CI della proiezione del parallelo MM' è uguale alla corda AM. E perciò, *i raggi de' paralleli sulla proiezione sono le corde delle distanze polari.*

212. Per costruire adunque un mappamondo si descriverà un cerchio ad arbitrio (*fig. 33*), indi si troverà il raggio della sfera ch'è 0,707 del raggio adottato pel cerchio, o pure operando graficamente si farà un triangolo isoscele rettangolo, con cateti eguali al raggio R della sfera, l'ipotenusa sarà r raggio del cerchio di proiezione. Con questo raggio r si descriverà un cerchio (*fig. 34*) CM'AM, e se ne dividerà la circonferenza di 5°, in 5° (*p. e.*), mettendovi i numeri 5,10,15 ec. fino a 360, o pure distinti in 180° di longitudine Est e 180 di longitudine Ovest, quando la proiezione sia sull'equatore. Con ciascuna delle corde del cerchio di raggio R, o sia del cerchio massimo della sfera da 5° fino a 90°, cominciando da zero che lo supponghiamo in A, si descriveranno 16 cerchi concentrici all'equatore, i quali saranno le proiezioni de' paralleli, perocchè hanno per raggio le rispettive distanze polari.

213. Ciò posto è evidente che le superficie delle calotte sferiche essendo eguali alle loro proiezioni, le zone comprese tra esse saranno eguali alle zone circolari comprese tra le loro proiezioni. E siccome i meridiani hanno le loro proiezioni in linee rette diametrali, perocchè l'occhio in questo caso è sito al polo, tutti gli spazi sferici compresi tra' quadrilateri curvilinei formati da due archi di meridiani e due archi di paralleli, saranno similmente eguali alle aree delle loro proiezioni. Or si meni il diametro che passa per lo zero dell'equatore, questo sarà il primo meridiano, indi per gli altri punti di divisione dell'equatore si menino gli altri diametri, si avrà tutta la rete del mappamondo, di paralleli e di meridiani, e quindi si potranno situare tutti i di-

versi luoghi nelle loro rispettive latitudini, e si sarà compiuto il mappamondo dell'emisfero proposto.

214. I difetti di questa carta sono che i luoghi invece di esservi rappresentati nelle distanze proporzionali a' coseni delle latitudini, lo sono nella ragione delle corde delle colatitudini, e però la configurazione delle regioni si troverà da per tutto sprolungata nel senso dal centro alla circonferenza, e pe' luoghi più vicini all'equatore più che pe' luoghi prossimi al polo, per cui il disegno ne risulta alterato.

LEZIONE XX.

Della costruzione delle carte corografiche.

215. *Delle carte corografiche.* L'anzidetto modo di costruire le carte può convenire alla rappresentazione degli emisferi, ma trattandosi di esibire sulla carta la configurazione di uno stato limitato, che occupa una piccola parte della superficie terrestre, o anche una grande estensione come l'Europa, l'Asia, ec. non è adatta; perocchè verso le parti lontane dal centro della carta, il disegno avrebbe intollerabili deformazioni. Nè molto meno si potrebbe senza grave inconveniente rilevare una carta parziale dal mappamondo in cui trovasi, isolando ed ingrandendo la parte che ivi rappresenta. Tutte le proiezioni hanno su di ciò difetti più o meno rimarchevoli, dipendenti dalla necessità di rappresentare una porzione di superficie sferica sul piano: si alterano le distanze tra i punti, le figure de' limiti e le estensioni delle superficie; e nella proiezione di Lorgna se si evita quest'ultimo, si rendono alquanto più sensibili gli altri due. Da ciò è derivato un continuo cambiar di metodo; ma noi ci limiteremo a dare una semplice idea di quelli che oggidì si usano.

216. *Della proiezione conica.* Per cominciare dalla proiezione conica, immaginiamo che si voglia la carta di un regno, per esempio della Francia, racchiusa tra cerchi dati in latitudine e in longitudine. Si suppone il globo terrestre inviluppato in un cono retto tangente il cerchio della latitudine mezzana, e si consideri la superficie di esso

come sensibilmente coincidente ancora con gli altri paralleli ad esso vicini, verso nord e verso sud. Indi s' immagini questo cono sviluppato sulla carta in un settore circolare: i meridiani saranno rette convergenti al vertice del cono, o vero al centro del settore: i paralleli saranno archi di cerchi che avranno per centro comune lo stesso vertice del cono.

217. Volendo usare più precisione, invece di fare il cono tangente la sfera, lo si fa secante nelle due latitudini estreme della carta, il che approssima d' assai. In fatti sia FG (*fig.* 35.) l' equatore, P il polo, aa' l' arco del meridiano del mezzo della carta, ac, $a'c'$, i raggi dei due paralleli estremi, le cui latitudini l e l' sono Ga, Ga'. La corda aa' prolungata darà la generatrice sL del cono, la quale fatta girare intorno di Cs, asse de' poli, darà con aa' la parte di superficie conica che dobbiamo sviluppare.

L' angolo $s = \frac{1}{2}\,(Oa - Pa')$

$$Oa = 90^\circ + l$$

$$Pa' = 90^\circ - l'$$

sarà $s = \frac{1}{2}\,(l + l')$

Or nel triangolo sca abbiamo $ac = as$ sen s, sarà lo stesso che dire cos $l = as \times$ sen $\frac{1}{2}\,(l + l')$, donde siegue

$$as = \frac{\cos l}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\,(l+l')}, \qquad a's = \frac{\cos l'}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\,(l+l')}$$

Co' valori di as ed $a's$ si avrà quello della parte di meridiano che la carta deve comprendere.

218. Per ottenere poi l' estensione da darsi al parallelo della carta, abbiamo dalla Descrittiva, che la circonferenza della base di un cono retto, sta all' arco dello sviluppo, come il seno dello angolo al vertice del triangolo generatore, al raggio.

Or se abs (*fig.* 36) rappresenta la parte di superficie conica da svilupparsi, sarà necessario determinare che parte l'arco ab occuperà nell'arco sviluppato, che deve aver per raggio il lato as del cono. Sia mn questo arco sviluppato, e si compisca il settore mno il cui raggio mo sia uguale ad as. Quando gli angoli c ed o fossero eguali, si otterrebbe

$ab : mn :: ac : om$, e se fossero eguali i raggi sarebbe $ab : mn :: c : o$, ma essendo disuguali gli angoli ed i raggi, avremo

$$ab : mn :: \left\{ \begin{matrix} ac : om \\ c : o \end{matrix} \right\} :: ac \times c : om \times o,$$ e volendo noi ottenere $ab = mn$

dovremo fare $ac \times c = om \times o$; e quindi $o = \frac{ac \times c}{om}$.

Si elevi ora ao perpendicolare ad as finchè incontri l'asse so; col centro o ed intervallo oa si descriva un cerchio che supporremo meridiano della terra, eq sarà l'equatore; quindi ac, coseno della latitudine ed as cot lat; laonde traducendo sarà $o = ab \frac{\cos \text{lat}}{\cot \text{lat}}$. Vale a dire l'arco dello sviluppo è uguale a $\frac{\cos \text{lat}}{\cot \text{lat}} \times$ gradi di longitudine che la carta deve comprendere.

Noti adunque gli elementi del settore sviluppato sarà facile eseguire la costruzione.

219. Per maggiore esattezza si può ancora costruire questa carta, facendo passare la generatrice del cono non più per le due latitudini estreme, ma in vece pe' due punti che sono alle due metà tra la latitudine mezzana e ciascuna delle due latitudini estreme, vale a dire pel quarto e pe' tre quarti della totale differenza di latitudine, siccome appunto fece *Delisle* nel costruire la gran carta della Russia, la quale comprende 33° di latitudine, ed ha per mezzano parallelo quello di 55°.

Al presente si preferisce la proiezione di Flamsteed modificata, imperciocchè è più esatta della conica.

220. *Della proiezione di Flamsteed.* In questa proiezione la verticale AB (*fig. 37*) del mezzo della carta rappresenta un meridiano; ed è tagliato ad angoli retti da una serie di linee rette, destinate a rappresentare i paralleli all'equatore, ed equidistanti tra loro, come MN, PQ, RS, ec. Dopo ciò si cercherà la lunghezza del grado di ciascun parallelo nella rispettiva latitudine, prendendo ab per lunghezza di un grado del meridiano o dell'equatore; e costruendo una scala di parti eguali su tale lunghezza ab si conoscerà quante parti di essa debbonsi comprendere

in *am, bp*, ec., queste lunghezze si porteranno col compasso dall'una e dall'altra parte del meridiano del mezzo sovra ciascun parallelo rispettivamente, e quindi facendo passare delle linee pe' punti di divisione si saranno costruiti similmente di grado in grado i meridiani della carta, i quali saranno perciò rappresentati da rette poligone, che si troveranno a sufficienza in continuazione.

Intanto per conoscere l'estensione che i gradi di longitudine debbono avere sopra ciascun parallelo, ci serviremo del principio che gli archi simili sono nella ragione de' raggi, e però posto

G = grado dell'equatore

g = grado del parallelo

1 = raggio dell'equatore

l = raggio del parallelo = cos latitudine

avremo $g = G \cos l$.

Sicchè dividendo G o sia *ab* della carta in 1000 parti, e facendo $G = 1$, il numero delle parti che cos l comprenderà sulla scala determinerà il grado di longitudine del parallelo.

221. *Della proiezione francese*. Questa carta di Flamsteed ha poi ricevuto la enunciata modifica, stantechè la proiezione francese può egualmente dirsi *proiezione conica modificata* e *proiezione di Flamsteed modificata*, essendo in essa abilmente l'uno all'altro metodo innestato.

Dopo aver tirata la retta verticale SO (*fig. 38*) al mezzo della carta per rappresentare il meridiano medio, si prendano le parti *ab, bc*, ec. eguali a' corrispondenti gradi del meridiano, indi si prenda *a*S eguale alla cotangente della latitudine mezzana, o sia eguale alla generatrice del cono della primitiva proiezione conica, o pure volendo considerare la terra sferoidica, si farà *a*S eguale alla tangente del meridiano ellittico al punto della latitudine mezzana e terminata all'asse de' poli. Col centro S si descriveranno gli archi *mn*, AB, MN, ec. per tutti i punti di divisione del meridiano medio SO, e questi rappresenteranno i paralleli. Sopra ciascuno di questi archi si segneranno le lunghezze dei gradi di longitudine che per le loro latitudini si convengono. Indi si faranno passare delle linee per tutti i punti dello stesso ordine, segnati su' paralleli, ed esse esibiranno i meridiani, i quali allorchè i paral-

leli non sono più di un grado distanti tra loro riescono abbastanza in continuazione da offrire all'occhio una linea curva e non già di forma poligona.

LEZIONE XXI.

Della costruzione delle carte topografiche.

222. La costruzione delle carte topografiche quando sono destinate a rappresentare estensioni sì picciole della superficie terrestre, da potersi considerare assolutamente piane, non dipende da alcuno dei due principî prospettico o di sviluppo già accennati, ma si esegue riportando esattamente sulla carta le misure prese sul terreno, mediante gli strumenti geodetici o grafici. I punti principali che la distinguono dovranno determinarsi per mezzo della triangolazione; e quindi sogliono queste carte chiamarsi ancora trigonometriche.

Di questa specie di carta a noi interessa solo quel tanto che basti a porne in grado di esibire la pianta di un porto.

223. *Della pianta di un porto.* Lo scopo di rilevare la pianta di un porto, di una rada, o di un ancoraggio qualunque si è quello di offrire il natural disegno delle diverse parti di quel tratto di lido, i diversi luoghi di ancoraggio, la qualità e quantità del fondo, i pericoli che vi si possono incontrare, le rilevazioni con oggetti della costa, per potervi accedere con sicurezza, la giacitura di essa rispetto a' punti cardinali, la indicazione de' venti che ne sono la traversia, e qualunque altra circostanza locale possa interessare il marino.

224. Siccome l'esattezza delle operazioni trigonometriche, per questa specie di costruzione di carta, ed in generale per tutti i lavori geodetici, dipende principalmente dalla esattezza della misura della base, e dalla valutazione degli angoli osservati nelle diverse stazioni per formare la triangolazione di quella parte di superficie terrestre da misurare; così bisognerà avere per iscopo principale ottener la più grande base possibile, ed i triangoli avvicinantisi nella forma, per quanto le circostanze lo permettono, a quella del triangolo equilatero; legandoli ancora tra

essi con più lati misurati, secondo meglio può ottenersi dalle speciali condizioni del terreno.

Si sceglierà a tal uopo la porzione più estesa di terreno unito, situata in modo che riesca agevole rilevare da' suoi estremi il maggior numero possibile de' punti di cui è mestieri determinare la posizione. Indi per misurarne la lunghezza si situerà verticalmente, col mezzo del filo a piombo, un picchetto a ciascuno degli estremi munito alla parte superiore di un pezzo di carta bianca, onde servire da punto di mira; e di tratto in tratto nell'intervallo si porranno degli altri picchetti similmente condizionati, e tutti nel piano del verticale della linea che deesi misurare.

Dietro questo apparecchio, mediante persone intelligenti, si procederà alla misura della estensione della base con una adatta catena di ferro, o in mancanza con un'assa di legno della lunghezza totale (*p. e.*) di 20 piedi, con avervi però praticata la divisione almeno del doppio piede onde rappresentare le parti decime. E si avverta che adoperando la catena, la quale ordinariamente suol essere di 10 metri, fa d'uopo darle la lunghezza di metri 10,02 per la considerazione di non poterla tendere perfettamente; poichè d'altronde non conviene forzarla nella tensione per non assoggettarla a rompersi.

Poscia, misurato il più esattamente che sia possibile la distanza di questi due luoghi, e ripetuta più volte l'operazione onde avere una distanza media che possa meritar fiducia, eliminando dal novero quelle che presentassero tale differenza da doversi riputare erronee, si determinerà la posizione di essa base rispetto al meridiano con una plancetta o col compasso di variazione o meglio mercè un azzimutto del sole. Indi con lo stesso compasso, o piuttosto con un cerchio, o con un sestante da ciascuno degli estremi di essa si prendano tutti gli azzimutti de' punti principali, e di maggiore interesse. Eseguito ciò, sulla carta si tracci la retta che rappresentar deve la base, dandole l'estensione che si stimerà proporzionata alla grandezza del disegno che vuol farsi; e nella posizione sul foglio più atta a tracciarvi la configurazione del luogo. Segnata la base sulla carta in quanto a lunghezza e posizione, si passerà a denominarla similmente in lunghezza e posizione, indicando il numero de' piedi che rappresenta e qual rombo essa corre. In oltre alle due estremità ri-

spettivamente si applichino le distanze angolari de' diversi oggetti rilevati, la cui posizione emergerà per ciascuno dall'incontro de' due rilevamenti fattine dagli estremi della base: sarà sempre meglio però calcolare i triangoli, e così determinare i punti rilevati.

Per compiere il disegno si andrà con una barca lungo tutto il lido, e mercè rilevamenti parziali e concatenati si prenderà esatta cognizione dell'andamento della costa. Finalmente vi si traccerà una rosa di venti convenevolmente.

225. Per notarvi poi tutte le necessarie notizie si procederà come siegue. In tempo di bassa marea si scorrerà tutta l'ampiezza del porto di 100 in 100 passi ed in tutti i sensi, misurando con uno scandaglio la profondità delle acque, e rilevando il punto dello scandaglio con due punti a terra di già segnati sulla carta. Si noterà la qualità del fondo ed ogni altra circostanza o nella stessa carta o in un foglio a parte. Si faranno queste osservazioni in maggior numero: 1.° Allorquando si rileva una considerevole disuguaglianza nel fondo, onde verificare se esista qualche banco o altro occulto pericolo, ed in tal caso bisognerà determinarne la posizione con ogni esattezza. 2.° Nel miglior sito di ancoraggio onde conoscerne l'estensione ed assegnarne tutti i punti di riconoscimento. 3.° Finalmente in ogni angusto sito per lo quale la nave fosse astretta passare.

A queste cose indispensabili si possono aggiungere tutte quelle che sono in ogni caso utili a' naviganti, come la posizione e la condizione della lanterna, della sanità, del lazzaretto, del luogo da rifornire la acqua, indicare la declinazione dell'ago, e cose simili.

226. Ne rimane ad avvertire che allorquando il terreno non offerisse una sufficiente estensione piana per la base, o il luogo da farne la pianta fosse molto vasto, allora si farà uso di una base calcolata invece della reale. Cioè da due punti la cui distanza potesse misurarsi, e che per la poca lontananza l'uno dall'altro non possono servire di base per la pianta, si rilevano due punti di sufficiente distanza e bene accessibili, e con la trigonometria si calcola la loro distanza ed il loro rilevamento: indi questa sarà la base della pianta.

LEZIONE XXII.

Della costruzione delle carte idrografiche.

227. *Carta idrografica* dicesi una mappa o rappresentazione di qualche parte del mare su di una superficie piana, per uso della navigazione.

L'invenzione della carta di mare è attribuita dal Fourmier ad Errico figliuolo di Giovanni Re di Portogallo, fiorito verso la metà del secolo XV. Essa differisce considerabilmente dalle geografiche: imperciocchè nella sua costruzione si ha per iscopo principale di rappresentare i rombi tutti con linee rette, e potervene tracciare immediatamente col compasso in tutti i punti possibili, sia per determinare il punto dell'arrivo, sia per determinare la rotta che rimane a fare. Vantaggio da non potersi ottenere con la proiezione delle carte geografiche, le quali rappresentando proiezioni di parte della sfera, sulla quale i meridiani s'intersecano tutti a' poli, non potrebbero esibire i rombi obliqui che secondo le proiezioni corrispondenti alle diverse lossodromie, e quindi non solo ne sarebbe difficile l'uso, ma non si potrebbero tracciare con una semplice operazione grafica tutti i rombi possibili e da un punto qualunque della carta.

Le carte marine finora venute in luce sono di quattro specie, *carte piane*, *carte ridotte*, *carte della proiezione di Mercatore*, e *carte globulari*.

Quelle però di cui presentemente fanno uso i marini sono di due specie, carte piane e carte ridotte, intendendo per queste le carte secondo la proiezione del Mercatore; e però noi ci limiteremo a parlare della costruzione di esse due, contentandoci di accennare soltanto quella delle altre, all'unico oggetto di porre in vista il progredimento successivo di tal ramo della scienza nautica.

228. *Della carta piana*. Diconsi carte piane quelle nelle quali i meridiani e i paralleli sono rappresentati da linee rette; gli uni e gli altri tra loro paralleli, e reciprocamente perpendicolari.

Esse, quantunque il loro inventore le avesse giudicate di buon uso,

e l'esperienza fattane ne' corti viaggi avesse il suo parere confirmato; pure furono dal Tolomei, circa 1600 anni prima nella sua geografia rigettate:

1.° Perchè incontrandosi in realtà tutti i meridiani ne' poli è cosa assurda il rappresentarli, specialmente in carte di grande estensione con rette parallele.

2.° Perchè le carte piane esibiscono i gradi di molti paralleli, eguali a quelli dell'equatore, ed in conseguenza le distanze, nel senso di oriente ed occidente, molto più grandi di ciò che dovrebbero essere, secondochè maggiore è la loro latitudine.

3.° Finalmente perchè sulle carte piane, mentre si conserva lo stesso rombo, viene a considerarsi che il vascello nel suo cammino percorra sempre un cerchio massimo; laddove ciò si verifica solo quando naviga per meridiano o sull'equatore, dappoichè se naviga per Est o Ovest fuori dell'equatore descriverà un cerchio ma non massimo; e se naviga per rombo obliquo segnerà una curva lossodromica.

229. Ma non ostante questi difetti, la carta piana per la facilità della sua applicazione, ha talmente allettato i marini che essa ancora è in uso per le corte navigazioni.

230. La sua costruzione è semplicissima, specialmente qual era da principio. Bastava formare un rettangolo, il cui lato verticale veniva diviso ne' gradi di latitudine che dovea la carta rappresentare; e l'altro lato ad angolo col primo, senza portare alcuna graduazione indicava la distanza in miglia dal luogo più orientale al luogo più occidentale della carta. Indi si segnavano sulla carta i luoghi mercè le loro latitudini, i rombi e le distanze; e perciò non teneasi conto delle longitudini allorquando bisognava marcare il punto di arrivo del vascello. Anzi queste carte venivano costruite con le latitudini solo riguardo a' luoghi principali, e tutti gli altri vi erano segnati mercè i rombi e le distanze in cui i luoghi sono e si guardano tra loro; e per certo tempo cangiarono ancora di nome, e furono dette *carte di rombi e distanze*. E venivano specialmente usate da' Francesi nel mediterraneo.

231. Non andò guari però e la carta piana fu alquanto sollevata da tale imperfezione, facendo che i gradi di longitudine non più fossero tra loro eguali nelle due estreme latitudini della carta, ed impiegando per costruirla la longitudine del mezzano parallelo; cioè impiegando la longitudine corrispondente al parallelo della latitudine media.

232. Per eseguire questa costruzione si faccia il grado di longitudine della carta, uguale al coseno del grado di latitudine, preso per raggio un grado del meridiano, ch'è uguale a quello dell'equatore nella ipotesi della terra sferica. Poichè essendo gli archi simili nella ragione dei rispettivi raggi, un grado dell'equatore sta ad un grado del parallelo, come il raggio dell'equatore sta al raggio del parallelo; ma il raggio del parallelo è identicamente il coseno della sua latitudine (160), laonde fatto il raggio eguale al grado dell'equatore, si avrà il coseno della latitudine eguale al grado del parallelo ad essa corrispondente.

E perciò se AB (*fig. 39*) rappresenta l'estensione del grado del meridiano della carta, col centro A ed intervallo AB si descriverà l'arco BC di tanti gradi quanti sono quelli della latitudine media della carta, indi si abbassi da C la perpendicolare CD, si avrà che AD coseno di BC, sarà l'estensione dovuta al grado di longitudine della carta piana proposta. Siccome però le operazioni grafiche non mai possono dare sufficiente esattezza, sarà miglior consiglio dividere AC per esempio in 1000 parti, e dalle tavole de' seni naturali desumere la lunghezza dovuta a BC.

233. La carta così costruita se riesce migliore di qual era aborigene, ritiene d'altronde sempre i suoi difetti. Se prima i gradi di longitudine erano tutti maggiori del vero, ora quelli nella maggior latitudine ne sono maggiori, e quelli nella minor latitudine ne sono minori; e le altre due imperfezioni sono restate com'erano.

234. Continuando i geometri ad investigare il modo di migliorare le carte idrografiche, vennero in luce le *carte ridotte* propriamente dette. In esse i meridiani erano rappresentati da linee rette convergenti a' poli, ed i paralleli da linee rette parallele, ma disuguali dall'una all'altra latitudine: e questo nuovo metodo pareva che volesse distruggere

gli errori della carta piana. Ma per la ragione che i paralleli tagliar debbono i meridiani ad angoli retti, e quivi erano inclinati, furono trovate difettose, e caddero in disuso.

235. *Della carta ridotta.* Finalmente a gran beneficio della navigazione comparvero le carte secondo la proiezione del fiamingo Gerardo Mercatore, che noi in oggi pure carte ridotte dimandiamo.

Questa carta ha nome dall' autore che la pose per la prima volta in uso, ma il pensiero non fu originalmente suo, essendone dato un lume da Tolomeo circa 1600 anni prima; indi dall' inglese Eduardo Wright perfezionata e dimostrata, tal quale il Mercatore poi la eseguì.

236. Per concepire un' idea chiara de' principj fondamentali che han servito alla costruzione di tal sorta di carta idrografica, immaginiamo una sfera che rappresenti la terra, e su di essa siano tanti meridiani quanti sono i minuti dell' equatore, i quali si vedranno tutti intersecarsi ai poli; l' equatore con tutti i paralleli di minuto in minuto; e le lossodromie rappresentanti tutti i rombi obliqui. Ora consideriamo tronchi i meridiani ne' due punti d' intersecazione, e che ogni semimeridiano divenga una retta, la quale sarà perpendicolare all' equatore. Così la superficie della sfera si sarà convertita, benchè accresciuta, in superficie semplice di un cilindro retto che ha per base un cerchio eguale all' equatore, e per altezza un semimeridiano sviluppato. I meridiani saranno tutti paralleli; il minuto di ciascun parallelo sarà eguale a quello dell' equatore, ed in conseguenza i paralleli tutti all' equatore eguali; e finalmente ogni rombo per la condizione di fare angoli eguali con tutti i meridiani, che ora sono lati del cilindro, diverrà curva elica. Sviluppata finalmente questa superficie cilindrica otterremo su di un piano tutto ciò che pria sulla superficie sferica, e poi sulla superficie cilindrica si vedea; con esser divenuti linee rette uguali e parallele, l'equatore e tutti i suoi paralleli; non che i rombi, i quali da curve lossodromiche sullo sferico, erano di già divenute curve eliche del cilindro.

237. In questa carta intanto evvi il considerevole errore, che ogni minuto di parallelo è eguale al minuto dell' equatore. Ma per non ri-

nunziare al vantaggio inestimabile di avere i rombi in linee rette, si è ricorso a rinvenire una misura che compensasse, sopra ciascun parallelo, l'aumento delle distanze. Questa misura doveva avere una ragione tanto successivamente maggiore della misura delle distanze sull'equatore, per quanto i minuti de' paralleli la hanno minore in rapporto al minuto dell'equatore.

Ma il minuto dell'equatore sta al minuto del parallelo come il raggio al coseno della latitudine, dunque le scale da misurar le distanze sopra i paralleli, dovranno serbare con la scala da usarsi per l'equatore, la costante ragione del coseno della latitudine al raggio; ma cos : *r* :: *r* : secante; laonde, fatto *r* eguale all' unità di misura sull'equatore, o sia eguale al minuto dell'equatore, si avrà che la misura conveniente alle distanze sopra ciascun parallelo sarà determinata dalla secante della latitudine.

Intanto, poichè si erano così aumentate le distanze nel senso de' paralleli; cioè di est ed ovest, bisognava far crescere egualmente le distanze nel senso del meridiano cioè di nord e sud, onde non essere obbligato alla confusione di aver due misure diverse fra due latitudini e longitudini date; perciò furono aumentati i minuti di latitudini come le proprie secanti: o in altri termini, i meridiani divennero le scale delle secanti di tutte le diverse latitudini della carta. Ed in conseguenza, non si può rappresentare l'intero globo con questa proiezione; imperciocchè il lato nord sud della carta è infinito, avendo frai suoi termini non uno, ma due termini infiniti, cioè due volte secante di 90°.

238. Quindi per la costruzione della carta ridotta dovrà cominciarsi dallo stabilire l'analogia: un minuto dell'equatore ad un minuto del parallelo, come il raggio alla secante della latitudine di esso parallelo; ed essendo in tale analogia due termini costanti, cioè il raggio trigonometrico e la secante che ne risulta; e due variabili a piacere, cioè il minuto dell'equatore, e quello che ne deriva pel meridiano, a seconda della diversa latitudine de' paralleli; così noi faremo il minuto dell'equatore eguale al raggio, e ne seguirà l'estensione dovuta al minuto del meridiano essere eguale alla secante. Vale a dire chiamando *fg* il minuto dell'equatore, *mq* il minuto del meridiano ad una

data latitudine, e finalmente λ la latitudine; faremo per costruire il meridiano della carta $fg : mq :: r : \sec\lambda$ e ponendo $fg = r$, risulterà $mq = \sec\lambda = \frac{1}{\cos\lambda}$, adunque allorchè avremo preso il minuto dell'equatore per raggio, e fatti i minuti de' paralleli tutti eguali a quelli dell'equatore, avremo pure $\sec\lambda = \frac{mq}{\cos\lambda}$, e quindi $\int \sec\lambda = \int \frac{mq}{\cos\lambda}$; e perciò dovendo il meridiano della carta costare della somma di tutte queste quantità di minuto in minuto ci troveremo precisamente nel caso di servirci delle tavole delle parti meridionali (161) che perciò furono dette ancora *tavole delle latitudini crescenti*, che noi continueremo a chiamare A.

239. Voglia costruirsi una carta che comprenda 11° 30′ di longitudine, e da 28° 39′ sino a 34° di latitudine. Si tiri l'orizzontale AB, (*fig. 40*) e si prendano su di essa parti eguali 11 ½ di estensione qualunque; e dai punti di divisione si elevino le perpendicolari, per rappresentare i meridiani, la lunghezza de' quali sarà determinata in totale dalla differenza de' valori di A per 28° 39′ e 34° o sia sarà di 376′,01 dell'equatore. I paralleli dovranno esser rappresentati da rette perpendicolari ai meridiani, ma ad intervalli sempre crescenti dall'equatore al polo, secondo i corrispondenti valori A. Cioè:

28° 39′	A = 1795′.47	
		23′.97 = A*b*
29	1819.44	
		68.94 = *bc*
30	1888.38	
		69.63 = *cd*
31	1958.01	
		70.37 = ec.
32	2028.38	
33	2099.53	
34	2171.48	

Ed eseguite poscia graficamente tutte queste operazioni parziali dovranno esattamente coincidere con la totale da principio stabilita.

Indi alle rispettive latitudini e longitudini si andranno situando i luoghi senz'aver riguardo all'alterata configurazione in distanza tra loro. Finalmente si descriveranno in luoghi opportuni di essa carta delle rose di venti, per potersene servire con più speditezza; ma coloro che amano la precisione, ne fanno a meno ed esigono che si faccia sempre uso del semicerchio per tracciare i rombi, i quali saranno sempre rappresentati da linee rette; giusta il gran vantaggio che ci siamo proposto di conseguire in tale specie di costruzione per isviluppo.

240. Non è gran tempo che da Senex, Wilson ed Harris vennero proposte le così dette *carte globulari*, le quali prendevano nome dalla conformità della loro rappresentazione allo stesso globo. In esse i meridiani sono inclinati, i paralleli equidistanti e curvilinei, ed i rombi aspirali come sulla superficie di una sfera.

Questa specie di carta trovasi tuttavia nella sua infanzia, ed è a pochi nota, per cui non sapremmo fermarci ad esporne il merito o i difetti. Essa fu posta sotto la protezione della patente di S. M. Britannica e passata per lo esame al dotto Halley, il quale non la fe' più comparire, forse che, quantunque la fosse di facile intendimento, riusciva difficoltosa nella pratica a motivo delle lossodromie.

LEZIONE XXIII.

De' problemi sulle carte idrografiche.

241. L'oggetto per lo quale si è costruita la carta idrografica, essendo quello di determinare in ogni istante il punto ove la nave ritrovasi, è indispensabile esporre i mezzi onde facilmente su di essa costruirlo.

Si consideri il primo meridiano come asse delle coordinate e l'equatore come quello delle ascisse, le quali avranno in conseguenza per origine l'intersecazione delle circonferenze de' detti due cerchi massimi, da linee rette nella carta rappresentate: indi con la latitudine e la longitudine calcolate o per istima o per osservazioni astronomiche, si determinerà il punto, col solo aiuto di due compassi, mediante i quali sarà facile menare due parallele fittizie, senza bisogno d'ingombrare la carta con linee rette realmente marcate.

242. Se però s' indica il punto sempre in termini relativi agli anzidetti due assi di generale convenzione, nel fatto, per comodo e speditezza, si considerano come assi delle coordinate il meridiano e il parallelo del punto di partenza; i quali essendo per la costruzione della carta rispettivamente paralleli a' primi, non esigono alcuna particolare avvertenza nell' operazione grafica, e basta solo che nell' enunciazione sia il punto riferito a' primi.

243. Ma noi dalla riduzione delle rette siamo pervenuti (175, 176, 177) alla conoscenza del rombo navigato e della distanza, la quale è in realtà la diagonale del parallelogrammo delle coordinate; adunque ancora con questi due elementi potremo determinare il punto sulla carta. Parimenti potremo raggiungere lo scopo, conoscendo uno qualunque de' primi due elementi, ed uno qualunque de' secondi. Ed in termini generali diremo avere sotto questo aspetto un triangolo rettangolo, di cui noti due elementi, vogliamo conoscere gli altri due mercè due compassi, a' quali è vantaggioso aggiugnere un semicerchio, e talvolta ancora una riga.

244. Intanto, per così fatta soluzione grafica del problema sarà sempre indispensabile una scala, la quale se trattisi di carta piana sarà regolarmente rappresentata dal meridiano della carta; perocchè ivi i gradi di latitudine son tutti eguali, ed il grado del meridiano è appunto servito di scala nella costruzione della carta. Ma se trattisi di carta ridotta bisognerà guidarci con le norme avute nel costruirla.

245. Allorquando n' è mestieri eseguir graficamente tai problemi sulla carta ridotta non possiamo servirci indifferentemente delle scale che essa ne presenta; ma è indispensabile sovvenirci della sua proiezione per isviluppo, mercè la quale i gradi dei paralleli sono tutti divenuti eguali tra loro ed a quelli dell'equatore; mentrechè i gradi dei meridiani per lo contrario rappresentano le quantità che si hanno dalla valutazione delle corrispondenti parti meridionali, e quindi vanno successivamente crescendo dallo zero sino all' infinito; circostanza che ingrandisce tutte le distanze dei luoghi fuori dell' equatore, e più le ingrandisce quanto più al polo si avvicinano, ove appunto diventano infinite.

246. Si dovrà dunque aver presente, e per massima costante nei problemi grafici di carta ridotta di allungar debitamente le distanze allorchè si vogliono sulla carta segnare; e diminuirle se debbonsi dalla carta rilevare.

247. Tutt'i problemi che possono farsi sulla carta ridotta, riduconsi principalmente ad un sol caso assunto in tesi generale, ed al suo inverso: cioè, *dato rombo e distanza, determinare sulla carta il punto dell'arrivo;* e per l'opposto, *dati due luoghi sulla carta determinare la loro distanza ed il rombo che mena dall' uno all' altro.*

248. Essendo però i rombi di tre specie diverse siegue naturalmente la suddivisione di tal problema generale in altri e tre coi loro inversi.

Prenderemo quindi ad esaminare

1.° Quando sia retto il rombo navigato, o quello per lo quale i due rombi si guardano;

2.° Quando sia parallelo il rombo navigato, o quello per lo quale i due luoghi si guardano;

3.° Finalmente quando trattisi di un rombo obbliquo.

249. 1.° *Siasi navigato per rombo retto.*

In questo caso essendo l'azzimutto eguale a zero, si sarà navigato per meridiano; la longitudine dell'arrivo sarà quella della partenza; e la differenza di latitudine sarà l'intera distanza navigata. Quindi la latitudine della partenza accresciuta o diminuita di tanti minuti di latitudine quante sono le miglia navigate verso il polo o verso l'equatore darà la latitudine dell'arrivo, e perciò il punto.

250. Inverso del 1.° *Due luoghi si guardano per meridiano, vuolsi determinare la loro distanza ed il rombo che vi conduce.*

Il numero de' minuti del meridiano che rappresenta la differenza delle latitudini dei due luoghi, rappresenterà il numero delle miglia della distanza che passa tra loro.

In quanto al rombo essendo l'azzimutto eguale a zero si andrà dall'uno all' altro navigando per nord, e dall' altro all' uno navigando per sud.

251. 2.° *Siasi navigato per rombo parallelo.*

Abbiamo in questo caso l'appartamento, e n'è d'uopo rinvenire la differenza di longitudine, la quale basterà a determinare il punto, essendo la latitudine dell'arrivo la stessa che quella della partenza.

Siccome cos *latitudine* : *r* :: *appartamento* : *differenza longitudine* ed intanto in ogni triangolo rettilineo rettangolo, cos *angolo obliquo* : *r* :: *cateto adiacente* : *ipotenusa*; così ne basterà formare un triangolo rettangolo di cui un cateto sia eguale all'appartamento, ed un angolo eguale alla latitudine, chè l'ipotenusa dovrà rappresentare la differenza di longitudine.

Per tal fine si procederà nel seguente modo:

Si applicherà l'appartamento secondo si è navigato per est o per ovest e dal suo estremo si prenderà il prossimo meridiano. Al primo estremo di esso appartamento ch'è il punto di partenza si applica un semicerchio sul quale, situato il diametro per parallelo, si farà un angolo eguale alla latitudine, col mezzo d'un filo o d'una riga: indi si porta il primo compasso lungo il preso meridiano finchè l'altra sua punta che indica il secondo estremo dell'appartamento giunga ad incontrare il filo o la riga: l'ipotenusa di tal triangolo rettangolo sarà la chiesta differenza di longitudine, e però disposta per parallelo determinerà il punto dell'arrivo.

252. Inverso del 2.° *sieno due luoghi che guardansi per parallelo si vuol conoscere la loro distanza, ed il rombo che dall'uno all'altro conduce.*

Per conoscere la distanza dei luoghi così disposti dovrà ridursi ad appartamento la differenza di longitudine di essi luoghi, e ci serviremo della relazione fra le due solite analogie.

r : cos *latitudine* :: *differenza di longitudine* : *appartamento*

r : cos *angolo obliquo* :: *ipotenusa* : *cateto adiacente*

Quindi ritenendo la differenza di longitudine per ipotenusa, faremo col semicerchio un angolo eguale al complemento della latitudine dei luoghi col vertice in uno di essi; e dall'altro abbasseremo alla riga una perpendicolare; questa sarà il cateto adiacente all'angolo eguale alla latitudine e quindi l'appartamento, che, contato in parti dell'equatore, darà la distanza dei due luoghi.

Riguardo al rombo essendo il suo azzimutto di 90° si andrà per est dall' uno all' altro, e per ovest dall' altro all' uno.

253. *Siasi navigato un numero di miglia per rombo obliquo, bisogna determinare il punto dell' arrivo.*

Secondo la massima generale il problema consiste nell' aumentare debitamente la distanza, cioè di aumentarla analogamente alle parti meridionali, e però ritenendo il rombo e riducendo la differenza di latitudine in parti dell' equatore a differenza di latitudini crescenti avremo il parallelo dell' arrivo. Con questo e col rombo navigato si determina il punto dell' arrivo.

254. *Inverso del 3.° dati due luoghi che rilevansi per rombo obliquo determinarne la distanza ed il rombo pel quale si rilevano.*

Dobbiamo in questo caso rilevar dalla carta la distanza che passa tra i luoghi, o sia abbiamo la distanza accresciuta e dobbiamo debitamente diminuirla per conoscere la vera.

E siccome le distanze sulla carta ridotta si trovano accresciute analogamente alle parti meridionali così cominceremo dal diminuire la differenza di latitudine. Laonde contati sul meridiano i minuti della differenza delle due latitudini, si prenderanno altrettante miglia in parti dell' equatore, e si applicheranno per meridiano dall' uno dei luoghi; da questo estremo della vera differenza di latitudine si va per parallelo ad incontrare il rombo che passa tra i due luoghi, e si sarà debitamente diminuita l'ipotenusa o sia la distanza: cioè l'apertura di compasso da questo punto d' incontro fino al luogo donde si è contata la vera differenza di latitudine, contata in parti dell' equatore, sarà la chiesta distanza.

Relativamente al rombo che conduce dall' uno all' altro dei proposti luoghi, basterà situare il semicerchio col centro sopra uno di essi e col diametro per parallelo, e indi far passare il filo o la riga pel centro e per l' altro luogo, e così contati i gradi dell' azzimutto si avrà il rombo ed il suo opposto per andare dall' uno all' altro di essi.

Pochi esempî eseguiti su di una carta ridotta nè porranno in grado di facilmente eseguire tutti e sei gli anzidetti problemi, ed altri ancora

che ne dipendono, e che debbonsi risguardare come esercizî di sveltezza nella soluzione grafica de' problemi.

255. *Metodo della latitudine media*. Tutt'i problemi sulla carta ridotta possono egualmente eseguirsi con la stessa facilità con la quale si eseguono sulla carta piana, mercè la sola avvertenza di misurar le distanze sul meridiano alle latitudini rispettive e senza mai fare alcun caso de' gradi del parallelo eccettochè per indicare la longitudine dei luoghi.

E questo metodo consiste a ritenere implicitamente per valore medio dell'unità di misura su' diversi paralleli dalla latitudine partita sino alla latitudine arrivata, il valore che ha il minuto di latitudine crescente, corrispondente alla latitudine media (171), ipotesi contenente un picciolissimo errore solo geometricamente parlando, ma nel fatto, e molto più nelle operazioni grafiche non può addurne veruno, o almeno sarà esso sempre certamente minore di quello che può aversi dalle operazioni grafiche, principalmente quando siano molto complicate, come nel caso del 2.° e 3.° problema, e loro inversi.

256. *Del punto di partenza*. Pria di por fine alla presente lezione, è utile avvertire che quantunque sembri a prima vista essere il punto della partenza quello dal quale si è messo alla vela, pure per le varie condizioni de' porti e delle rade non sempre avviene così: e bisogna prender per punto di partenza quello che si ottiene col mezzo di rilevazioni.

Se sonovi sulla costa due luoghi ben distinti e segnati nella carta, ed abbastanza tra loro distanti per dare un angolo al vertice non minore di 30°, se ne prenderanno le rilevazioni col compasso azzimuttale, e con queste si segnerà il punto di partenza sulla carta. Se però la costa non offrisse che un sol punto segnato nella carta e da rilevare con certezza, per determinare il punto della partenza sarà d'uopo misurarne la distanza. A tal fine si prenderà una prima rilevazione, ed indi facendo rotta pressochè perpendicolare alla medesima, dopo un discreto numero di miglia, relativamente alla distanza dell'oggetto rilevato, si farà del medesimo un secondo rilevamento. Allora si avrà un triangolo

nel quale son noti la base ch'è la distanza in miglia percorsa nell'intervallo delle due rilevazioni, e gli angoli adiacenti, formati dalla rotta tenuta e da ciascuno de' due rilevamenti fatti; e sarà agevol cosa determinare il valore de' due lati: quindi col secondo rilevamento e con la distanza trovata si avranno i dati sufficienti a marcare sulla carta il *punto della partenza*.

257. Dopo aver lasciato di vista la costa, in ogni mezzodì, o sempre che piaccia, si dovrà determinare sulla carta il punto dell'arrivo, prendendo per punto di partenza quello dell'arrivo del giorno precedente, come ancora si pratica nel calcolo del punto per istima (175, 176, 177). E ciò costituisce il grande inconveniente per lo quale si accorda poca fiducia al punto stimato, oltre alle inesattezze dipendenti dall'uso del loche e della bussola (183). Mentre al contrario aver la latitudine e la longitudine dell'arrivo per mezzo delle osservazioni astronomiche adduce l'immenso vantaggio di ottener gli elementi che determinano il punto, sempre indipendentemente da ogni fatto anteriore; in guisa che non mai potrà esservi accumulazione di errori. Laonde non dobbiamo contentarci di quanto finora si è detto, che nel solo caso non si abbiano avuto circostanze favorevoli alle osservazioni degli astri.

PARTE TERZA

TRIGONOMETRIA SFERICA.

LEZIONE XXIV.

Principi fondamentali.

258. Per passare allo studio dell' astronomia nautica è indispensabile saper risolvere in tutti i casi possibili il seguente problema: *date tre dei sei elementi di un triangolo sferico, trovare il valore degli altri tre rimanenti.* Ma prima di occuparci della soluzione di esso, non potrà esser stimata come fuori proposito una rapida reminiscenza delle principali verità di geometria, e delle più essenziali formole trigonometriche.

259. Il cerchio massimo di una sfera, essendo generato in essa da un piano che passa pel suo centro, siegue che i cerchi massimi avranno per centro e per raggi, quelli della sfera. Essi dovranno sempre intersecarsi, ed in parti eguali; ed aver per comune sezione un diametro della sfera. Per ogni diametro della sfera possono passare infiniti cerchi massimi; ma per un diametro e per un punto qualunque della superficie non può passarne che uno.

260. Ogni sezione fatta in una sfera, e che non passa per lo centro è un cerchio, ma non massimo: esso dividerà la sfera sempre in parti disuguali, e quel diametro della sfera che passa per lo centro di un cerchio minore è ancora perpendicolare al piano del medesimo, ed incontra la superficie sferica ne' due vertici delle due porzioni sferiche nelle quali esso cerchio la divide. Per due punti non diametralmente opposti sulla superficie di una sfera possono passare infiniti cerchi minori, ed un solo cerchio massimo. L' arco minore della semicirconferenza di quell' unico cerchio massimo, che può passare per due punti dati sulla superficie di una sfera è il minimo di tutti gli archi di cerchi appartenenti alla sfera che può tra i due dati punti passare.

Quindi ci serviremo di tale arco per indicare sulla sfera la distanza tra due punti dati: e se i due punti fossero diametralmente opposti, la loro distanza sarà rappresentata dalla semicirconferenza del cerchio massimo.

261. D'un cerchio qualunque della sfera dicesi *asse* il diametro della sfera che gli è perpendicolare, e *poli* gli estremi di tal diametro: e perciò tutti i cerchi paralleli hanno lo stesso asse e gli stessi poli; e tutti i cerchi massimi che hanno per comune sezione lo stesso diametro, saranno perpendicolari al cerchio massimo e a tutti i suoi paralleli, cui esso diametro è asse. E perciò quel cerchio massimo che passa pe' poli di un altro della medesima sfera gli sarà perpendicolare, e se gli è perpendicolare passerà pe' suoi poli; e però questo perpendicolarismo, e questo passar pe' poli l'uno dell'altro sarà reciproco, senza potersi verificare l'una di queste condizioni scompagnata dall'altra.

262. Un cerchio massimo che passa pe' poli di un cerchio minore lo divide in parti eguali.

263. Gli archi di cerchio massimo interposti tra la circonferenza di altro cerchio massimo ed i poli di questo sono archi di quadranti.

264. Si dice *angolo sferico* l'inclinazione scambievole che hanno, nel punto in cui s'uniscono sulla superficie di una sfera, due archi di cerchi della medesima sfera. Il detto punto dicesi *vertice* e gli archi che ivi s'incontrano diconsi *lati* dell'angolo sferico.

265. Un angolo sferico si dice *retto* o pure *obliquo* secondochè le due tangenti i due archi al punto dell'incontro di essi formano un angolo retto, o pure un angolo obliquo; e l'angolo obliquo distinguesi in oltre in angolo *acuto* ed angolo *ottuso* secondochè l'angolo fatto dalle dette due tangenti è acuto o pure ottuso.

266. I due angoli sferici che forma un arco circolare con un altro diconsi *angoli conseguenti*. E finalmente gli angoli sferici che hanno

il vertice comune e i lati in continuazione delle medesime periferie circolari si dicono *angoli verticali.*

267. Essendo l'angolo sferico la scambievole inclinazione di due archi della medesima sfera, che incontransi in un punto qualunque della superficie, sarà ogni angolo sferico lo stesso che l'angolo rettilineo formato da' due elementi de' suoi lati adiacenti al vertice, ed in conseguenza sarà l'angolo stesso, che quello rettilineo formato dalle rette tangenti i lati nel vertice medesimo. E perciò gli angoli sferici verticali sono tra loro eguali, e la somma degli angoli sferici conseguenti è uguale a due angoli retti.

268. Se i lati di un angolo sferico sono di cerchi massimi di una sfera, sarà l'angolo eguale alla scambievole inclinazione de' semicerchi cui essi appartengono, per la ragione che l'angolo sferico è uguale all'angolo rettilineo fatto dalle due tangenti il vertice, le quali sono di necessità entrambi perpendicolari alla comune sezione de' piani di essi cerchi, perocchè la è sempre un diametro.

269. Quindi ne segue: 1.° che se un angolo sferico formato da due archi di cerchi massi è retto, tali cerchi s'intersecano perpendicolarmente; e se s'intersecano perpendicolarmente, l'angolo sferico è retto; 2.° che prolungato ciascuno de' lati di un tale angolo retto, l'uno passerà pe' poli dell'altro, e viceversa.

270. La misura di ogni angolo sferico formato da archi di cerchi massimi, è l'arco compreso tra' suoi lati, di quel cerchio massimo che ha per polo il vertice dell'angolo proposto; ed è per conseguenza eguale ancora all'angolo che fanno tra loro gli assi de' cerchi massimi alle cui periferie i lati dell'angolo appartengono.

271. Si chiama *triangolo sferico* ogni porzione di superficie sferica, terminata da tre archi di cerchi della medesima sfera: ed esso analogamente al triangolo rettilineo distinguesi in *equilatero*, *isoscele*, e *scaleno*; ed inoltre dicesi *rettangolo* se ha uno o più angoli retti, ed

obbliquangolo se non ne ha nessuno. *I triangoli sferici però che da ora innanti prenderemo a considerare sono esclusivamente quelli formati da tre archi di cerchi massimi, ciascuno minore di 180.°*

272. Se nella sfera si menino i raggi a' tre vertici del triangolo sferico, si avrà un triedro, del quale gli angoli diedri saranno indicati dagli angoli sferici del triangolo, e gli angoli piani da' lati del triangolo stesso.

273. Se prendansi per poli i tre vertici degli angoli di un triangolo sferico, e descrivansi tre circonferenze di cerchio massimo si avranno quattro triangoli (171), de' quali contempleremo solo quello detto *centrale*, in cui ciascun lato è supplemento dell'angolo che gli è opposto nel triangolo dato; e viceversa ciascun lato del triangolo dato addizionato con l'angolo che gli è opposto nel triangolo costruito forma 180°. Così fatti due triangoli diconsi triangoli *polari* l'uno dell'altro, avendo essi i vertici degli angoli reciprocamente e rispettivamente per poli de' lati.

274. Siccome ne' triangoli sferici non si considera la lunghezza assoluta de' lati, ma in vece il numero de' gradi che essi contengono, così il loro valore sarà esclusivamente relativo alla maggiore o minore estensione del raggio della sfera, il quale potendo assumersi della grandezza che si voglia, noi lo faremo eguale a quello delle tavole, cioè all'unità, donde passiamo a' seguenti ricordi:

1 $R = 1$
2 $\tan 45° = 1$
3 $\cot 45° = 1$
4 $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$
5 $\sec^2 a - \tan^2 a = 1$
6 $\text{cosec}^2 a - \cot^2 a = 1$
7 $\text{sen } 45° = \cos 45°$
8 $\text{sen } 45° = \sqrt{1 - \cos^2 45°} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . . . . (4 e 7)
9 $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
10 $\cos^2 30° = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ . . . . (4 e 9)

11 $\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ . . . . (10)

12 $\tan a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$

13 $\cot a = \frac{1}{\tan a}$

14 $\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$

15 $\sec a = \frac{1}{\cos a}$

16 $\text{cosec } a = \frac{1}{\text{sen } a}$

17 $\sec a = \sqrt{1 + \tan^2 a}$

18 $\text{cosec } a = \sqrt{1 + \cot^2 a}$

19 $\text{sen } a = \frac{\tan a}{\sec a}$ . . . . (12 e 15)

20 $\text{sen } a = \frac{\tan a}{\sqrt{1 + \tan^2 a}}$ . . . . (19 e 17)

21 $\cos a = \frac{\cot a}{\text{cosec } a}$ . . . . (14 e 16)

22 $\cos a = \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$ . . . . (12 e 18)

23 $\tan a = \frac{\text{sen } a}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$ . . . . (12 e 4)

24 $\tan a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$ . . . . (12 e 4)

25 $\tan a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$ . . . . (12 e 4)

26 $\text{sen }(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

27 $\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$

28 $\text{sen }(a + b) + \text{sen }(a - b) = 2 \text{ sen } a \cos b$. (26 + 27)

si faccia $a + b = p$, ed $a - b = q$

29 $\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ . . . . (28)

30 $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} b \cos a$ . . (26 — 27)

31 $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$. . . . . . . (30)

32 facendo $a = b$

33 $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$ . . . . (28, o 30)

si ponga $2a = c$

34 $\operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$ . . . . (32)

35 $\operatorname{sen} a \cos a = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2a$ . . . . (33)

36 $\operatorname{sen}(a+b) \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \operatorname{sen}^2 b$ (26 × 27)

37 $= \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a)$

38 $= \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$

39 $= \cos^2 b - \cos^2 a$ . . . . . . (36 e 4)

40 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

41 $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

42 $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$ . . (40 + 41)

43 $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ . . . . (42)

44 $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ . . (40 — 41)

45 $\cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$ . . . . (44)

46 $\cos(a+a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ . . . . (40)

47 $\cos c = \cos^2 \frac{1}{2} c - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$ . . . . (46)

48 $\cos c = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$ . . . . (47 e 4)

49 $\cos c = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c - 1$ . . . . (47 e 4)

sia $d = 90° - c$

50 $\operatorname{sen} d = 1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} d$ . . . . (48)

51 $\operatorname{sen} d = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} d - 1$ . . . . (49)

52 $\operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{2}}$ . . . . (48)

53 $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$ . . (40 × 41)

54 $= \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

55 $\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q} = \cot \frac{1}{2}(p+q) \tan \frac{1}{2}(p-q)$ $\frac{(31)}{(29)}$ (14, 12)

56 $\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \tan \frac{1}{2}(p+q) \tan \frac{1}{2}(p-q)$ . . . $\frac{(45)}{(43)}$ (12)

57 $\tan(a \pm b) = \frac{\text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{ sen } b}$ . . . . $\frac{(26 \text{ e } 27)}{(40 \text{ e } 41)}$ (12)

e dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per $\cos a \cos b$, e riducendo

58 $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

59 $\cot(a \pm b) = \frac{1 \mp \tan a \tan b}{\tan a \pm \tan b}$ . . . . (57 e 13)

60 $\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$ . . . . (59 e 13)

61 $\tan(a \pm b) = \frac{\cot b \pm \cot a}{\cot a \cot b \mp 1}$ . . . . (60 e 13)

62 $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \cot a}{\cot^2 a - 1}$ . . . . (58 e 61)

63 $\tan c = \frac{2 \tan \frac{1}{2} c}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} c}$ . . . . (62)

64 $\tan c = \frac{2 \cot \frac{1}{2} c}{\cot^2 \frac{1}{2} c - 1}$ . . . . (62)

65 $\cot c = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} c}{2 \tan \frac{1}{2} c}$ . . . . (63 e 13)

66 $\cot c = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cot \frac{1}{2} c}$ . . . . (64 e 13)

67 $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \frac{1 - \tan^2 a}{2 \tan a}$ . . . . (62 e 13)

68 $\tan c = \frac{2}{\frac{1}{\tan \frac{1}{2} c} - \tan \frac{1}{2} c} = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} c - \tan \frac{1}{2} c}$ . . . . . . (63)

69 $\cot \frac{1}{2} c - \tan \frac{1}{2} c = \frac{2}{\tan c} = 2 \cot c$ . . . . (68)

70 $\tan \frac{1}{2} c = \cot \frac{1}{2} c - 2 \cot c$ . . . . (69)

71 $1 - \cos c = \frac{\text{sen } c}{\cos \frac{1}{2} c} \times \text{sen } \frac{1}{2} c = \text{sen } c \tan \frac{1}{2} c$ . . (48 e 34)

72 $\tan \frac{1}{2} c = \frac{1 - \cos c}{\text{sen } c}$ . . . . (71)

73 $1+\cos c = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c} \times \cos \frac{1}{2} c = \operatorname{sen} c \cot \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\tan \frac{1}{2} c}$ (49 e 34)

74 $\tan \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} c}{1+\cos c}$ . . . . (73)

75 $\tan^2 \frac{1}{2} c = \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$ . . . . (72×74)

76 $\operatorname{sen} c = \frac{2 \tan \frac{1}{2} c}{1+\tan^2 \frac{1}{2} c}$ . . . . (34, 12, 15 e 5)

77 $\cos c = \frac{1-\tan^2 \frac{1}{2} c}{1+\tan^2 \frac{1}{2} c}$ . . . . $\frac{(76)}{(63)}$ (12)

78 $\cos c = \frac{\cot \frac{1}{2} c - \tan \frac{1}{2} c}{\cot \frac{1}{2} c + \tan \frac{1}{2} c}$ . . . . (77 e 13)

79 $\operatorname{sen} c = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} c + \tan \frac{1}{2} c}$ . . . . (78 × 68)

80 $\operatorname{sen} c = \frac{1}{\cot \frac{1}{2} c - \cot c}$ . . . . (79 e 70)

81 $\tan \frac{1}{2} c = \frac{1-\cos c}{\tan c \cos c}$ . . . . (72 e 12)

82 $\tan \frac{1}{2} c \tan c = \frac{1-\cos c}{\cos c} = \frac{1}{\cos c} - 1$ . . . . (81)

83 $\frac{1}{\cos c} = 1 + \tan \frac{1}{2} c \tan c$ . . . . (82)

84 $\cos c = \frac{1}{1+\tan \frac{1}{2} c \tan c}$ . . . . (83)

85 $\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \tan \frac{1}{2}(p+q) \cot \frac{1}{2}(p-q)$ $\frac{(29)}{(31)}$ (14 e 12)

86 $= \frac{\tan \frac{1}{2}(p+q)}{\tan \frac{1}{2}(p-q)}$ . . . . (85 e 13)

87 $\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{1}{2}(p+q) \cot \frac{1}{2}(p-q)$ . . . $\frac{(43)}{(45)}$ (14)

88 $= \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{\tan \frac{1}{2}(p-q)}$ . . . . (87 e 13)

89 $\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \tan \frac{1}{2}(p+q) = \frac{\cos q - \cos p}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}$ $\frac{(29)}{(43)}$ o $\frac{(45)}{(31)}$ (12)

90 $\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{1}{2}(p-q) = \frac{\cos p + \cos q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}$ $\frac{(29)}{(45)}$ o $\frac{(43)}{(31)}$ (14)

91 $\tan a + \tan b = \frac{\text{sen } a}{\cos a} + \frac{\text{sen } b}{\cos b} = \frac{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b}$ (12)

92 $\tan a + \tan b = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos a \cos b}$ . . . . (91)

93 $\cot a + \cot b = \frac{\text{sen } (a+b)}{\text{sen } a \text{ sen } b}$ . . . . (14 e 26)

94 $\tan a - \tan b = \frac{\text{sen } (a-b)}{\cos a \cos b}$ . . . . (12 e 27)

95 $\cot b - \cot a = \frac{\text{sen } (a-b)}{\text{sen } a \text{ sen } b}$ . . . . (14 e 27)

si ponga $a = 90°$

96 $\tan (45° \pm \frac{1}{2} b) = \frac{1 \pm \text{sen } b}{\cos b} = \frac{\cos b}{1 \mp \text{sen } b}$ . . . (89 e 90)

97 $\tan (45° \pm \frac{1}{2} b) = \frac{\sqrt{1 \pm \text{sen } b}}{\sqrt{1 \mp \text{sen } b}}$ . . . . (96)

$a = 60°$

98 $\text{sen } (60° + b) - \text{sen } (60° - b) = \text{sen } b$ . . . . (30 e 11)

99 $\cos (60° + b) + \cos (60° - b) = \cos b$ . . . . (42 e 11)

$a = 45°$

100 $\text{sen } (45° + b) = \frac{\cos b + \text{sen } b}{\sqrt{2}} = \cos (45° - b)$ . . (26 e 8)

101 $\cos (45° + b) = \frac{\cos b - \text{sen } b}{\sqrt{2}} = \text{sen } (45° - b)$ . . (40 e 8)

102 $\tan (45° + b) = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}$ . . . . (58 e 2)

103 $\tan (45° - b) = \frac{1 - \tan b}{1 + \tan b}$ . . . . (58 e 2)

275. Dopo ciò ne sarà sufficiente stabilire il seguente:

Teorema fondamentale.

Sia ABC (*fig. 41*) un triangolo sferico, O il centro della sfera cui esso appartiene, e s'intendano tirati i raggi AO, OB, OC. Si faccia passare un piano tangente la sfera nel punto A, e si tirino in esso le AD ed AE

tangenti gli archi AB e AC, finchè incontrino i raggi prolungati OD ed OE: con la DE si congiungano i punti D ed E.

Abbiamo dalla trigonometria piana

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2\ AE \times AD \cos A$$
$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2\ OE \times OD \cos a$$

sottraendo la prima dalla seconda equazione, e sostituendo i simboli trigonometrici

$$0 = \sec^2 b - \tan^2 b + \sec^2 c - \tan^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a + 2 \tan b \tan c \cos A$$
$$= 2 - 2 \sec b \sec c \cos a + 2 \tan b \tan c \cos A, \quad (274,5)$$

dividendo per 2 e sostituendo i valori di seno e coseno (174, 15 e 12)

$$= 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A}{\cos b \cos c},$$ e liberando da rotto

$$= \cos b \cos c - \cos a + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A,$$

dalla quale si ricavano le due equazioni

1.ª $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$

2.ª $\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A.$

Or se chiamiamo $a'\ b'\ c'$ i lati, ed A′, B′ C′ gli angoli del triangolo polare del triangolo proposto ABC, (*fig. 42*), avremo pure

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\text{sen}\, b' \cos c'},$$

che tradotti in quantità del triangolo proposto ABC, e riflettendo che il coseno dell'arco supplementare è di segno contrario al primo, si avrà

$$-\cos a = \frac{-\cos A - (-\cos B \times -\cos C)}{\text{sen B sen C}} = \frac{-\cos A - \cos B \cos C}{\text{sen B sen C}},$$

e cambiando i segni

3.ª $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen B sen C}}$, ed ancora

4.ª $\cos A = \cos a\ \text{sen B sen C} - \cos B \cos C$

Le quali quattro equazioni finali si enunciano nel seguente modo:

Il coseno di un lato	*in espressione de' lati*	*è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati*, più *il prodotto de' seni de' medesimi lati, moltiplicato pel coseno dell' angolo da essi compreso.*
	in espressione degli angoli	*è uguale al coseno dell' angolo opposto* più *il prodotto de' coseni degli altri due angoli, diviso pel prodotto de' seni de' medesimi angoli.*
Il coseno di un angolo	*in espressione de' lati*	*è uguale al coseno del lato opposto* meno *il prodotto de' coseni degli altri due lati, diviso pel prodotto de' seni de' medesimi lati.*
	in espressione degli angoli	*è uguale al prodotto de' seni degli altri due angoli moltiplicato pel coseno del lato opposto* meno *il prodotto de' coseni di questi medesimi angoli.*

LEZIONE XXV.

Soluzione de' triangoli sferici obliquangoli.

276. Modificare il teorema fondamentale per dimostrare che in un triangolo sferico i *seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti*, per la qual cosa si ottiene la soluzione logaritmica de' triangoli sferici, nei quali son dati due angoli ed un lato opposto, o pure due lati ed un angolo opposto.

Si prendano due delle equazioni fondamentali (275.1.ª), per esempio

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad \text{e} \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}$$

Dalla prima: elevando tutto a quadrato e sottraendo ambo i membri dall' unità

$$1-\cos^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c}, \text{ o sia}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{\text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c}, \quad (4)$$

ma $\text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c = (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) = 1-\cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c$, dunque

$$\text{sen}^2 A = \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c}, \text{ o pure}$$

$$\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 a} = \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\text{sen}^2 a\, \text{sen}^2 b\, \text{sen}^2 c}$$

Dalla seconda si avrà similmente $\frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 b}$ = allo stesso secondo membro: laonde

$\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 a} = \frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 b}$, ed estraendo la radice, e svolgendo in proporzione

$\frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, b}$ o sia sen A : sen B :: sen a : sen b

Quindi si ha il seguente tipo di calcolo

colog sen A . . . . . = ...
log sen B . . . . . = ...
log sen a . . . . . = ...
log sen b . . . . . = ...

277. Modificare la formola del teorema generale onde renderla più comoda pel calcolo logaritmico, ed atta a risolvere i triangoli sferici in cui son dati i tre lati, o pure i tre angoli

Noi abbiamo $2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$, ed ancora $2\cos^2 \frac{1}{2} A = 1 + \cos A$ (274, 48 e 49)

Per la prima.

$$2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} = \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c - \cos a + \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$$

ma $\cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c = \cos(b-c)$, dunque

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}; (274, 45)$$

e dividendo per 2 ed estraendo la radice

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$ e facendo $a+b+c=s$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-c)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$, da cui si ha il seguente tipo

a . . . .
colog. sen b . . . . = ...
colog. sen c . . . . = ...
$s=$ . . . .
$\frac{1}{2}s=$ . . . .
l. sen $\frac{1}{2}s-c$ . . . . = ...
l. sen $\frac{1}{2}s-b$ . . . . = ...
somma . . . .
sen $\frac{1}{2}$ A . . . . . . $\frac{1}{2}$ som. . . . .
$\times 2$
A = ...

Per la seconda.

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos A=1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}=\frac{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c+\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

$$=\frac{\cos a-(\cos b\cos c-\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\quad(274,40)$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c},\ (274,45)$$

dividendo per 2, ed estraendo la radice

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$, ed il tipo di calcolo sarà

a . . . .
colog sen b . . . . = ...
colog sen c . . . . = ...
$s=$ . . . .
log. sen $\frac{1}{2}s=$ . . . . = ...
log. sen $\frac{1}{2}s-a$ . . . . = ...
somma
log. cos $\frac{1}{2}$ A . . . . . . $\frac{1}{2}$ som. . . . .
$\times 2$
A = ...

Osservando che in questo secondo tipo vi è una sottrazione di meno, sarà utile preferirlo.

278. Quando sono noti i tre angoli e si voglia un lato, quantunque possa usarsi lo stesso procedimento per venire alle formole finali, pure per amor della brevità le faremo derivare dal triangolo polare A′B′C′ (*fig. 42*).

Abbiamo dimostrato

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s-c)\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s-b)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\ \text{ e }\ \cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}s\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$

perciò sarà similmente

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A'=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s'-c')\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s'-b')}{\operatorname{sen}b'\operatorname{sen}c'}},\ \cos\tfrac{1}{2}A'=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}s'\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}s'-a')}{\operatorname{sen}b'\operatorname{sen}c'}}$$

e riducendo in funzioni del triangolo proposto ABC, avremo

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(\tfrac{1}{2}S-C)\cos(\tfrac{1}{2}S-B)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}},\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}S\cos(\tfrac{1}{2}S-A)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

È vero che gli archi supplementari hanno lo stesso seno, ma quando trattasi della metà, la metà di un supplemento è complemento della metà dell'arco proposto; quindi i *coseni* si cangiano in *seni*, e viceversa.

Intanto per economia di tempo e di operazioni, adotteremo la seconda equazione, della quale il tipo di calcolo sarà

A. . . . .
colog sen B . . . . = ...
colog sen C . . . . = ...
S = ...
log cos $\tfrac{1}{2}$ S . . . . = ...
log cos $\tfrac{1}{2}$ S — A . . . . = ...
som . . . .
log sen $\tfrac{1}{2}$ a . . . . $\tfrac{1}{2}$ som . . . .
× 2
a = ...

279. Modificare la formola del teorema fondamentale, onde pervenire alle formole di Nepero, ed essere in grado di risolvere col mezzo

de' logaritmi i triangoli sferici allorchè son dati due lati e l'angolo compreso, o pure due angoli ed il lato comune.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-b)\,\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}}\\ \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\,\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}}\end{array}\right\}$$ e moltiplicando i membri rispettivi

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\,\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}},$$

ma l'espressione del radicale è precisamente quella di $\cos\frac{1}{2}C$; dunque

$\text{sen}\,\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\dfrac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}\,c}\cos\frac{1}{2}C$, e con simile procedimento si avrà

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A=\frac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-a)}{\text{sen}\,c}\cos\frac{1}{2}C$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}s}{\text{sen}\,c}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A\,\text{sen}\,\frac{1}{2}B=\frac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,c}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C.$$

Si prenda ora la differenza e la somma delle prime due equazioni, e la somma e la differenza delle altre due

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\mp\text{sen}\,\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A=\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen}\,c}\cos\frac{1}{2}C\mp\frac{\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\text{sen}\,c}\cos\frac{1}{2}C,$$

o sia

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}(A\mp B)=\frac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-b)\pm\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-a)}{\text{sen}\,c}\cos\frac{1}{2}C,$$

e similmente si avrà dalle altre due

$\cos\frac{1}{2}(A\mp B)=\dfrac{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\pm\text{sen}\,(\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen}\,c}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C$; or noi abbiamo

$\text{sen}\,p+\text{sen}\,q=2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$ . . . . (274,29)
$\text{sen}\,p-\text{sen}\,q=2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)$ . . . . (274,31)
$\text{sen}\,c=2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$ . . . . (274,34)

dunque

$\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\frac{1}{2}s-b-\frac{1}{2}s+a)\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{2}s-b+\frac{1}{2}s-a)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$, o sia

1.ª $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$, e praticando lo stesso per le altre

2.ª $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C$

3.ª $\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$

4.ª $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$.

Si facciano le seguenti divisioni

$\frac{1.^a}{3.^a}\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C$

$\frac{2.^a}{4.^a}\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C$

Queste quando son noti due lati e l'angolo compreso. Si avrà la semidifferenza e la semisomma degli altri due angoli, e quindi saranno noti tutti e tre; per trovare poi l'altro lato ci serviremo della formola

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S\sim C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}$$

$\frac{1.^a}{2.^a}\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$

$\frac{3.^a}{4.^a}\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c$

Queste quando son noti due angoli ed il lato comune, e richiedonsi gli altri due lati.

Per avere il terzo angolo, faremo

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

Tipo di calcolo.

Dati a, b, C

a . . . . .

b . . . . .

$a+b$ . . . . .

$\frac{1}{2}(a+b)$ . . . . . colog sen = ... colog cos = ...

$a-b$ . . . . .

$\frac{1}{2}(a-b)$ . . . . . log sen = ... log cos = ...

$\frac{1}{2}$C . . . . . log cot = ...

log tan $\frac{1}{2}(A-B)$ . . . . = ... $\frac{1}{2}(A+B)$ …… = ...

$\frac{1}{2}(A+B)$ . . . .

somma . . . . = angolo maggiore

differenza . . . . = angolo minore

Il tipo pe' lati sarà analogo a questo.

280. Dividendo la prima per la seconda di queste ultime quattro equazioni, avremo

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}(a+b)};$$

la quale equazione dimostra la perfetta corrispondenza delle relazioni del triangolo sferico col triangolo piano.

LEZIONE XXVI.

Soluzione de' triangoli sferici rettangoli.

281. Modificare il teorema fondamentale, onde poter risolvere con più semplicità il triangolo quando uno degli angoli sia retto.

Nel triangolo rettangolo, essendo sempre noto l'angolo retto, basterà che due sole delle altre sue parti sian note, per cui non vuolsi contemplare il caso nel quale siano noti tutti e tre gli angoli. Siccome però fa d'uopo distinguere l'ipotenusa da' cateti, e questa circostanza rende il 3.° duplicato del 2.° de' casi ch' esporremo, così continueremo a dire essere sei i casi assolutamente diversi che possano darsi; cioè

1.° Dato un cateto e l'angolo opposto; trovar l'altro angolo.
2.° Dato un cateto e l'angolo opposto; trovar l'altro cateto.
3.° Dato un cateto e l'angolo opposto, b, B, trovar l'ipotenusa.
4.° Dati i due cateti, b, c; trovar l'ipotenusa.
5.° Dati i due angoli obliqui B, C; trovar l'ipotenusa.
6.° Dato un angolo e il cateto adiacente; trovar l'ipotenusa.

Per trovare in tutt' i casi possibili gli elementi ignoti del triangolo sferico proposto bisognerà fare alle equazioni del teorema fondamentale le seguenti modifiche. Sia $A = 90°$,

1.° Essendo $\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\text{sen } A \text{ sen } B} = \frac{\cos C}{\text{sen } B}$, sarà

$$\text{sen } B = \frac{\cos C}{\cos c}.$$

2.ª Abbiamo $\text{sen}\, b = \frac{\text{sen B sen}\, c}{\text{sen C}}$, ma $\text{sen B} = \frac{\cos \text{C}}{\cos c}$, quindi

$$\text{sen}\, b = \frac{\tan c}{\tan \text{C}}.$$

3.ª Si è già dedotto $\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen A}} = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen B}}$, dunque

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen B}}.$$

4.ª $\cos \text{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$, e però $0 = \cos a - \cos b \cos c$, o sia

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

5.ª $\cos a = \frac{\cos \text{A} + \cos \text{B} \cos \text{C}}{\text{sen B sen C}} = \cot \text{B} \cot \text{C}.$

6.ª $\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c \\ \text{sen}\, a &= \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen B}} \end{aligned}\right\}$ dividendo rispettivamente i membri, sarà

$\cot a = \frac{\cos b \cos c\, \text{sen B}}{\text{sen}\, b}$, ma $\cos c = \frac{\cos \text{C}}{\text{sen B}}$, dunque

$$\cot a = \cot b \cos \text{C}.$$

Queste formole di cui non è mestieri indicare i tipi di calcolo per la loro grande semplicità, si enunciano nel seguente modo:

1.° *Il seno di un angolo è uguale al coseno dell'altro, diviso pel coseno del cateto opposto;*

2.° *Il seno di un cateto è uguale alla tangente dell' altro cateto, divisa per la tangente dell' angolo opposto.*

3.° *Il seno dell' ipotenusa è uguale al seno di un cateto diviso pel seno dell' angolo opposto;*

4.° *Il coseno dell' ipotenusa è uguale al prodotto de' coseni de' due cateti;*

5.° *Il coseno dell' ipotenusa è uguale al prodotto delle cotangenti degli angoli obliqui;*

6.° *La cotangente dell' ipotenusa è uguale alla cotangente di un cateto* × *coseno dell' angolo compreso;*

282. Quando nella prima ipotesi del § 279, il terzo lato c si richiegga, senza curare il valore degli altri due angoli, si abbassi l'arco m perpendicolare ad AC (*fig. 43.*), sarà pel triangolo rettangolo (281,4°) $\cot a = \cot \varphi \cos C$, e perciò $\tan \varphi = \tan a \cos C$.

Inoltre $\left\{\begin{array}{l}\cos a = \cos \varphi \cos m \\ \cos c = \cos (b - \varphi) \cos m\end{array}\right\}$, e dividendo l'una per l'altra queste due equazioni, sarà $\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos \varphi}{\cos (b - \varphi)}$.

Vale a dire *i coseni de' lati sono nella ragione de' coseni de' segmenti adiacenti*, e

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

283. E nella seconda ipotesi, volendosi il terzo angolo C, trascurando il valore degli altri due lati, faremo $\cot \theta = \cos c \tan A$ (281,3°). Indi dividendo insieme rispettivamente le due equazioni seguenti

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} \theta = \frac{\cos A}{\cos m} \\ \operatorname{sen} (B - \theta) = \frac{\cos C}{\cos m}\end{array}\right\} \text{ si ha } \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} (B - \theta)} = \frac{\cos A}{\cos C}.$$

Vale a dire *i coseni degli angoli alla base sono ordinatamente proporzionali ai seni de' segmenti dell' altro angolo*, e

$$\cos C = \frac{\cos A \operatorname{sen} (B - \theta)}{\operatorname{sen} \theta}.$$

LEZIONE XXVII.

Canoni da osservarsi nella risoluzione de' triangoli sferici, e casi dubbi.

Pe' triangoli sferici in generale.

284. *Ogni lato di qualunque triangolo sferico debbe esser considerato minore di 180°.*

Dimostrazione. Ammettendo de' lati maggiori di 180° non si avrebbe alcuna conoscenza assoluta del triangolo da risolvere, percioechè i tre vertici apparterrebbero a più triangoli sferici; e d'altronde non am-

mettendosi in geometria angoli maggiori di 180°, mancherebbe l'espressione geometrica dell'angolo triedro fatto al centro della sfera da' tre angoli piani di cui i lati del triangolo sferico sono rispettivamente la misura. Sarebbe di più cosa ben inutile occuparsi di questa specie di figure; mentre, quando occorresse, dopo risoluto il triangolo, potrebbe sempre costruirsi la figura proposta, con prendere il resto a quattro retti di quell' arco che dovess' essere maggiore di 180°. Ond' è che i triangoli, della cui risoluzione si occupano i geometri, sono sempre formati da lati ciascuno minore di 180°.

285. *In ogni triangolo sferico la somma di due lati è maggiore del terzo; e la somma di tutti e tre è sempre minore di* 360°.

Dimostrazione. Essendo per la proprietà degli angoli triedri e poliedri, ciascun angolo piano minore della somma degli altri; e la somma di tutti minore di 360°; alla medesima condizione saranno soggetti gli archi che ne sono rispettivamente la misura. Quindi ec:

286. *In ogni triangolo sferico la somma degli angoli è minore di* 540°, *e maggiore di* 180°.

Dimostrazione. Essendo sempre eguale a 180° la somma di ciascun angolo col lato opposto del triangolo polare, avremo $A + a' + B + b' + C + c' = 540°$, e perciò $A + B + C < 6 \times 90°$. E poichè $a' + b' + c' < 360°$, sarà $A + B + C > 2 \times 90°$.

287. *In ogni triangolo sferico, se dalla somma di due angoli si toglie il terzo, il residuo sarà minore di* 180°.

Dimostrazione. Conoscendo che nel triangolo sferico la somma di due lati è sempre maggiore del terzo, applichiamo questa teorica un istante al triangolo polare, sarà $a' + b' > c'$, e sostituendo

$$180° - A + 180° - B > 180° - C, \text{ o sia}$$
$$180° - A - B > -C, \text{ o pure}$$
$$-A - B + C > -180°, \text{ e cambiando i segni}$$
$$A + B - C < 180°.$$

Da ciò abbiamo ancora $\frac{1}{2}(A + B - C) < 90°$.

288. *In ogni triangolo sferico la semisomma di due lati e la semisomma de' due angoli opposti son sempre della medesima specie.*

Dimostrazione. Noi abbiamo già dimostrato

$\cos \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C$ (279,4.°),

dalla quale si ha $\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c}$; il secondo membro è necessariamente positivo perchè la metà dell'arco è sempre minore del quadrante, dunque positivo dovrà essere ancora il primo membro; per la qual cosa $\frac{1}{2} (A + B)$ ed $\frac{1}{2} (a + b)$ dovranno esser sempre della medesima specie.

289. *In ogni triangolo sferico al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore, al medio il medio ed al minore il minore; e viceversa.*

Dimostrazione. Abbiamo $\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C :: \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} c$ donde è chiaro che se sen A è il massimo sen c è il minimo: solo bisognerà por mente che se l'angolo o l'arco sia minore di 90° il *seno* maggiore appartiene all'angolo o arco maggiore, ed è al contrario quando l'angolo o l'arco sia maggiore di 90°.

290. *In ogni triangolo sferico obliquangolo, se dal vertice di uno degli angoli si meni un arco perpendicolare al lato opposto,* cadrà esso al di dentro del triangolo *se i due rimanenti angoli sono della medesima specie;* e cadrà al di fuori *se questi sono di specie diversa.*

Dimostrazione. Ne' due triangoli rettangoli (*fig.* 43) si prenda il valore dell'arco m, si avrà $\tan m = \tan C \operatorname{sen} \varphi = \tan A \operatorname{sen} (b - \varphi)$.

Dunque se C ed A avranno lo stesso segno, $\operatorname{sen} \varphi$ e $\operatorname{sen} (b - \varphi)$ si troveranno nel medesimo caso; ma se gli angoli C ed A sono di diversa specie, e quindi tan C e tan A di segno contrario, bisognerà che $\operatorname{sen} \varphi$ e $\operatorname{sen} (b - \varphi)$ abbiano altresì il segno contrario: i seni però sono positivi sempre da 0° fino a π; e diventano negativi solo allor quando l'arco è dall'altra parte dello zero, quindi l'arco m per dar risultamenti negativi è d'uopo che cada fuori del triangolo ABC. In tal caso dunque i segmenti di b saranno rappresentati da φ e $\varphi - b$, e quelli dell'angolo B, da θ e $\theta - B$: cosicchè la formola $\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}$

(282) dovrà esprimersi in generale $\cos o = \frac{\cos a \cos (b \sim \varphi)}{\cos \varphi}$; e parimenti in quanto all'angolo, la formola $\cos C = \frac{\cos A \operatorname{sen} (B - \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$ (283) diverrà $\cos C = \frac{\cos A \operatorname{sen} (B \sim \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$.

291. *In un triangolo sferico obliquangolo, l'espressione* $\frac{1}{2} s - c$ *dovrà sempre aver luogo direttamente, ma l'altra espressione* $\frac{1}{2} S - C$ *dovrà intendersi per* $\frac{1}{2} S \sim C$.

Dimostrazione. Essendo la somma di due lati sempre maggiore del terzo (285), sarà $a + b > c$; ma non essendo gli angoli soggetti a questa medesima condizione, e dovendo esser positiva la differenza indicata, è mestieri scrivere $\frac{1}{2} S \sim C$, e non già $\frac{1}{2} S - C$.

Pe' triangoli sferici rettangoli in particolare.

292. *L'ipotenusa è minore del quadrante se i due cateti sono della stessa specie, e n'è maggiore nel caso contrario.*

Dimostrazione. Abbiamo dalla trigonometria piana che il coseno è positivo da $0°$ sino ad $\frac{1}{2}\pi$, ed è negativo da $\frac{1}{2}\pi$ sino a π, dunque perchè sia $\cos a = \cos b \cos c$, bisognerà che i due fattori del secondo membro siano entrambi positivi o entrambi negativi: cioè, $\cos a = \cos b \times \cos c$, o pure $\cos a = -\cos b \times -\cos c$; allorchè dunque i coseni dei cateti hanno segno diverso, quello dell'ipotenusa sarà negativo, o sia $-\cos a = -\cos b \times \cos c$ o pure $-\cos a = \cos b \times -\cos c$.

293. *L'ipotenusa sarà minore del quadrante se i due angoli obliqui sono della stessa specie, e ne sarà maggiore se sono di specie diversa.*

Dimostrazione. Poichè $\cos a = \cot B \cot C$, avremo lo stesso ragionare del caso precedente.

294. *L'ipotenusa è minore del quadrante se un cateto e l'angolo compreso sono della stessa specie, e nel caso opposto l'ipotenusa sarà maggiore del quadrante.*

Dimostrazione. Essendo $\cot a = \cot b \cos C$, la dimostrazione sarà la medesima del caso precedente.

295. *Il seno d'un angolo è sempre maggiore del seno del lato opposto.*

Dimostrazione. Dall'equazione de' quattro seni si ha sen A : sen a :: sen B : sen b; e se il primo termine è il massimo della proporzione bisognerà che l'ultimo sia il minimo. Or quando l'angolo A è retto, sen A è sempre il massimo, adunque sen b dovrà esser sempre minore di sen B. Vale a dire, quando sono entrambi minori del quadrante avremo $B > b$, e quando passano i 90° sarà $B < b$.

296. *Un cateto e l'angolo opposto son sempre della medesima specie.*

Dimostrazione. L'equazione $\operatorname{sen} B = \frac{\cos C}{\cos c}$ dimostra chiaramente, che C, e c debbono essere della medesima specie; imperciocchè essendo il seno di un arco sempre positivo, positivo ancora dovrà essere il quoziente di $\frac{\cos C}{\cos c}$, e quindi bisognerà che tai due coseni abbiano lo stesso segno, cioè dovranno essere il cateto e l'angolo opposto ambedue minori, o ambedue maggiori del quadrante.

Casi dubbî.

297. In quanto a' casi dubbî che nella trigonometria sferica soglionsi distinguere, a vero dire possono ridursi ad un solo; a quello cioè di dover risolvere il triangolo mercè la formola de' quattro seni. Infatti (*fig. 44*) nel triangolo ABC supponghiamo noti a, b, B; il valore di A si otterrà facendo $\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$, equazione che svolta in proporzione darà sen b : sen a :: sen B : sen A, donde è chiaro che se sen a è maggiore di sen b, ancora sen A dovrà esser maggiore di sen B. In tutti i casi ne' quali sen A esibisce per le tavole due valori di A, de' quali uno sia maggiore, e l'altro minore di B, non vi sarà dubbio alcuno: la semplice ispezione dell'analogia deciderà della scelta; ma quando sen A, esibisce i due valori di A entrambi maggiori o minori di B, vi saranno due soluzioni; cioè gli stessi dati apparterranno a' due trian-

goli sferici BCA e B'CA', de' quali gli archi CA e CA' cadono sulla semicirconferenza BAB' ad egual distanza dall'arco perpendicolare Cx.

Avendo noi contemplata la grandezza de' seni nella esposta analogia, non è mestieri esporre regole diverse per le due circostanze nelle quali l'angolo B sia acuto o ottuso: basterà solo aver presente che per gli archi o angoli minori di 90° il seno maggiore appartiene all'arco maggiore e viceversa per quelli maggiori di 90°, all'arco maggiore corrisponde il seno minore.

Quando in fine l'arco CA sia nella condizione di Cx, cioè che BAC sia un triangolo rettangolo in A, e siano noti in esso il cateto b e l'angolo opposto, si avranno similmente e per la stessa ragione due soluzioni; poichè gli stessi dati possono ancora appartenere al triangolo CB'A; o sia, dovendo trovar l'ipotenusa con la formola de' quattro seni, cioè $\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B}$, non potrà mai determinarsi con la sola contemplazione del triangolo, quale de' due valori di a offerti dalle tavole esclusivamente gli appartenga; e del pari se ci facciamo prima a determinare C, poichè $\text{sen}\, C = \frac{\cos B}{\cos b}$; o pure il valore di c, che si ha facendo $\text{sen}\, c = \frac{\tan b}{\tan B}$. Dai quali due valori di C e c altro non possiamo rilevare che essendo i valori di B e b della stessa specie, sen C e sen c sono entrambi positivi; ma i seni son sempre positivi sia che appartengano al primo o al secondo quadrante, dunque si avranno sempre due triangoli distinti.

LEZIONE XXVIII.

Delle analogie differenziali de' triangoli sferici.

298. *Prima analogia differenziale.* Se in un triangolo sferico qualunque due lati sieno costanti, esaminiamo come un errore commesso sul terzo lato può influire sopra uno degli angoli adiacenti.

Nel triangolo sferico SPZ (*fig. 45*) sieno costanti i due lati SP ed SZ, ed il lato PZ variabile; e vogliasi conoscere in qual modo la va-

riazione di tal lato PZ influisce sull'angolo ZPS, ch'è uno degli adiacenti al medesimo.

È ben chiaro che secondo varia il lato PZ il triangolo ZPS cangerà di forma e di grandezza.

Supponghiamo che il lato PZ divenga PT, e con questo dal vertice P preso per polo, si descriva TN arco di parallelo ad EQ, che rappresenti l'arco simile di cerchio massimo di cui è polo lo stesso punto P; indi il punto Z descriva l'arco ZN di parallelo ad un altro cerchio massimo che abbia il polo in S: il triangolo SZP, per la variazione del lato PZ sarà divenuto SNP.

Quando l'errore ZT commesso sul lato ZP sia molto piccolo da poter supporre l'arco confuso con la corda, tutto il triangolo sferico ZNT potrà esser considerato come rettilineo; e poichè è rettangolo in T, avremo TZ : TN :: R : tan NZT, o cot TZS. Ma per gli archi simili TN ed EQ si ha TN : EQ :: sen TP : R (160), quindi moltiplicando in corrispondenza questa equazione con la prima, sarà TZ : EQ :: sen TP : cot SZP, o sia $dPZ : dP :: \text{sen}\,(dPZ + PZ) : \cot SZP$.

Vale a dire: *l'errore commesso su di un lato sta all'errore che ne siegue sopra uno degli angoli adiacenti, come il seno del lato errato, compresovi l'errore, alla cotangente dell'altro angolo adiacente al medesimo lato variabile.*

299. Egli è ora d'uopo esaminare quando l'errore commesso su di un lato, e quello che ne risulta sopra uno degli angoli adiacenti abbiano lo stesso segno, o il segno contrario. Abbiamo testè dimostrato esser TZ : EQ :: sen TP : cot TZS, e perciò $\frac{TZ}{EQ} = \frac{\text{sen}\,TP}{\cot TZS}$, ma sen TP è sempre positivo da 0° fino a π; e cot TZS è positiva da 0° fino ad $\frac{1}{2}\pi$, ed è negativa da $\frac{1}{2}\pi$ fino a π, adunque il segno del quoziente del secondo membro dipenderà esclusivamente da quello di cot TZS; cioè, se SZP sarà ottuso il quoziente sarà positivo, e sarà negativo se l'angolo SZP sarà acuto.

Quindi ancora TZ ed EQ avranno lo stesso segno quando l'angolo SZP è ottuso, ed avranno segno contrario se lo stesso angolo SZP sarà acuto. Laonde, *essendo in un triangolo sferico due lati costanti ed*

uno variabile, l'errore che ne siegue sopra uno degli angoli adiacenti avrà lo stesso segno dell'errore offerto dal lato variabile, se l'altro angolo adiacente sia ottuso; ma quando esso sia acuto avrà il segno contrario.

300. *Seconda analogia.* In un triangolo sferico essendo costanti un angolo ed uno de' suoi lati, si vuol determinare in qual modo un errore commesso sull'altro lato dell'angolo medesimo, influisca sul terzo lato del triangolo.

Nel triangolo sferico SZP (*fig.* 46) sieno costanti l'angolo P ed il lato PS, e sia TZ l'errore dell'altro lato PZ: col polo S e l'arco ST si descriva l'arco di parallelo TN il quale incontri l'altro SZ continuato sino ad N. Pel triangolo rettilineo TNZ rettangolo in N si ha TZ : NZ :: R : cos TZN o pure cos SZP o sia dPZ : dSZ :: R : cos SZP. Perciò *l'errore commesso sul lato variabile sta a quello che ne siegue sul lato opposto all'angolo costante, come il raggio al coseno dell'angolo da questi due lati compreso.*

301. Dalla detta analogia intanto abbiamo $\frac{TZ}{NZ} = \frac{R}{\cos SZP}$ donde è chiaro che il secondo membro è positivo o negativo, secondochè SZP è acuto o pure ottuso; e quindi TZ ed NZ avranno lo stesso segno se SZP è acuto, e lo avranno contrario se è ottuso.

302. *Terza analogia.* In ogni triangolo sferico essendo due lati costanti, un errore commesso sul terzo lato si domanda come influisce sull'angolo opposto.

Nel triangolo sferico SPZ (*fig.* 47) rappresenti TZ un errore commesso sul lato SZ, mentre i due lati ZP ed SP sono costanti. Dopo le precedenti costruzioni, si avrà che il triangolo SZP prenderà la figura SNP. Nel triangolo rettilineo TNZ rettangolo in T si ha TZ : ZN :: cos TZN : R :: sen TZP : R :: sen SZP : R; e per gli archi simili NZ ed EQ si ha NZ : EQ :: sen PZ : R; or moltiplicando in corrispondenza le due proporzioni avremo TZ : EQ :: sen SZP : $\frac{R^2}{\text{sen PZ}}$, o sia dSZ : dP :: sen SZP : $\frac{R^2}{\text{sen PZ}}$. E però

l'errore commesso sul terzo lato sta a quello che ne deriva sull'angolo opposto, come il seno di uno degli angoli adiacenti, al quadrato del raggio diviso pel seno dell'altro lato che forma il detto angolo adiacente.

303. In quanto a' segni di tali errori, dalla proporzione TZ : EQ :: sen SZP : $\frac{R^2}{\text{sen PZ}}$, abbiamo $\frac{TZ}{EQ}=\frac{\text{sen SZP}\times\text{sen PZ}}{R^2}$, nella quale equazione il secondo membro essendo necessariamente sempre positivo, TZ ed EQ o sia *l'errore commesso sul terzo lato, e quello che ne siegue sull'angolo opposto avranno sempre lo stesso segno.*

304. Non occorre nemmeno di accennare che ognuna delle tre esposte analogie differenziali è applicabile a due casi, cioè a quello in ciascuna delle dimostrazioni contemplato, ed al suo opposto; vale a dire, ritenendo sempre le due costanti fra gli elementi dati, ed a questi aggiugnendo come terzo elemento dato una delle grandezze variabili alternativamente.

PARTE QUARTA

ASTRONOMIA NAUTICA.

LEZIONE XXIX.

Principî teoretici per determinare la posizione degli astri.

305. Da quanto si è detto nella *parte seconda* abbiamo di già notato che i mezzi offerti dalla navigazione per istima, essendo limitati alla sola considerazione del globo terrestre non sono sufficienti a renderci sicuri della determinazione del punto di arrivo della nave (257). Era adunque indispensabile ricorrere a mezzi di maggior precisione, i quali fu agevol cosa ritrovare nella contemplazione degli astri; attesochè l'immensa loro distanza dalla terra rende esatta quasi sempre l'ipotesi di essere il globo terrestre una sfera concentrica a quella che può immaginarsi aver per raggio tutta la distanza dell'astro dal centro della terra; per la qual cosa l'angolo triedro fatto al centro comune segnerà co' suoi lati sopra ciascuna delle due superficie sferiche tre punti che saranno i vertici di due triangoli sferici simili; e quindi, se due di tai punti sian dati di posizione su di una delle due sfere, e si conoscano le relazioni di essi col terzo, sarà facil cosa determinare quest'ultimo mercè la soluzione del triangolo sferico; donde si otterrà di fatto il terzo punto ancora sull'altra sfera. E però volendo determinare un punto sulla superficie terrestre basterà calcolare la posizione del suo zenit.

Nostro scopo adunque, prima di ogni altra cosa, dovrà esser quello di giugnere alla conoscenza della posizione che le stelle fisse hanno tra loro.

306. Generalmente parlando in tre modi ne può occorrere di determinare la posizione di un astro: rispetto all'equatore; rispetto all'eclittica; e rispetto all'orizzonte. E considerandoli sempre come punti della superficie di una sfera, per determinar questi il mezzo più spedito sarà

mediante due coordinate sferiche a due cerchi massimi dati di posizione. Ed esse saranno, riguardo all'equatore la declinazione e l'ascensione retta; riguardo all'eclittica, la latitudine e la longitudine; e riguardo all'orizzonte, l'altezza e l'amplitudine.

Trovare la posizione di un astro rispetto all'equatore.

307. *Determinare l'altezza del polo e dell'equatore.* Da un punto qualunque della superficie della terra, distante dall'equatore, e da'due poli (98), sarà facile osservare, come in seguito s'intenderà, le due altezze meridiane di una stella di perpetua apparizione, la semisomma di tali due altezze darà quella del polo, o sia la latitudine del luogo. Sia HZON (*fig. 48*) il meridiano di un luogo, EQ l'equatore, Pp l'asse de'poli, HO l'orizzonte, Z ed N lo zenit ed il nadir di un osservatore, ed a un astro che abbia dal polo P una distanza minore della declinazione del vertice Z; o ciò ch'è lo stesso, minore dell'altezza del polo P, o sia minore della latitudine del luogo; per la qual cosa aP essendo minore di PO, allorchè la terra avrà fatto 180° di rotazione e la stella troverassi nuovamente nel piano del meridiano, quantunque dalla parte del semimeridiano inferiore, essa sarà veduta in a'. Dunque se l'altezza meridiana superiore sarà aO, la inferiore sarà a'O, la cui semisomma darà OP altezza del polo, o vero la latitudine del luogo; ed il complemento di questa dinoterà PZ distanza polare dello zenit, e similmente EH altezza dell'equatore. Delle stesse due altezze meridiane della stella a, cioè di aO ed a'O facendo la semidifferenza otterremo aP, e a'P ch'entrambi dinoteranno la sua distanza polare, della quale facendo il complemento a 90° avremo aE declinazione dell'astro.

308. *Determinare la declinazione degli astri.* L'aver determinata così OP o sia ZE latitudine del luogo, ed in conseguenza il suo complemento EH, altezza dell'equatore, ne pone in grado di determinare la declinazione di tutti gli altri astri; imperciocchè la troveremo sempre dinotata dalla differenza positiva tra l'altezza dell'astro e quella dell'equatore. Se A è un astro ed AB il parallelo che per la rotazione

della terra ne sembra esso descrivere in un giorno, AH ne sarà l'altezza meridiana, ed AH — EH = AE ne sarà la declinazione; o pure, essendo un astro in m, si avrà per sua declinazione Em = EH — mH.

309. *Determinare l'ascensione retta di un astro.* Per determinare ora l'ascensione retta di un astro s, cominciamo dal supporre che A sia la sezione di ariete. Si noti l'istante in cui questo trovisi al meridiano; indi si noti l'altro istante in cui s sarà giunto al meridiano in m: la differenza de' tempi, ridotta in gradi (103) darà l'ascensione retta dell'astro (117).

Trovare la posizione di un astro rispetto all' eclittica.

310. *Determinare la latitudine e longitudine di un astro.* Essendo sempre nota la posizione dell'equatore sull'eclittica, siegue che conosciuta la posizione di un astro relativamente ad uno di essi, si deduce facilmente la sua posizione anche rispetto all'altro. In fatti, sia EPL (*fig. 49.*) il coluro de' solstizî, EQ l'equatore e P il suo polo, CL l'eclittica e P' il suo polo, PG il cerchio di declinazione e P'B il cerchio di latitudine di un astro qualunque S.

Nel triangolo PP'S, abbiamo PP' costantemente di 23° 27' 57'' circa (112 e 270), PS complemento della declinazione, P'S complemento della latitudine, l'angolo SPP' complemento dell'ascensione retta AG perchè misurato da GQ, e l'angolo SP'P supplemento di SP'L, misurato da BL complemento della longitudine AB. Dunque pel lato costante PP', basterà in generale alla soluzione del problema la conoscenza di due degli altri elementi: e nella specie, avendo testè determinate la declinazione e l'ascensione retta dell'astro (308 e 309), avremo noti nel triangolo SPP' i due lati PP' e PS, e l'angolo SPP' da essi compreso, onde si potrà procedere alla soluzione del triangolo (279), ed ottenere i valori di PP'S il cui complemento sarà la longitudine AB, e di P'S che avrà per complemento la latitudine BS.

311. Se però l'astro del quale trattasi fosse il sole, il calcolo sarà molto più semplice, dappoichè essendo il moto che gli si attribuisce,

appunto quello della terra nella sua orbita, e perciò nel piano della eclittica, la sua latitudine è sempre zero; e quindi la longitudine, l'ascensione retta e la declinazione formano sempre un triangolo sferico rettangolo; come supponendo il sole in F abbiamo il triangolo GAF rettangolo in G, formato dall'ascensione retta AG, dalla declinazione GF, e dalla longitudine AF: in esso trovandosi l'angolo GAF costantemente noto (112), basterà conoscere un solo de' tre lati per essere in grado di determinare gli altri due.

Trovare la posizione di un astro rispetto all' orizzonte.

312. *Determinare l'altezza di un astro.* Per determinare finalmente la posizione di un astro rispetto all' orizzonte, essendo una delle due coordinate sferiche l'altezza dell' astro, distingueremo due casi; o l'astro è all'orizzonte, ed allora essendo la sua altezza eguale a zero non sarà d' uopo di occuparcene; o l' astro è ad un' altezza qualunque, ed in tal caso per conoscerla possiamo avvalerci di un istrumento a ciò destinato, e così averla direttamente dall' osservazione, benchè possiamo ancora ottenerla dal calcolo, allorquando si conosca la declinazione e l' ascensione retta dell' astro.

Rappresenti HZON (*fig. 50*) il meridiano di un luogo, HO l'orizzonte, ZN il primo verticale, EQ l'equatore, P e *p* i suoi poli, ed *mn* il parallelo cui sembra l'astro S' descrivere, e siano in fine P*d* il cerchio di declinazione e Z*h* il verticale che passa per l'astro.

Nel triangolo sferico ZPS' saranno noti ZP complemento della latitudine, PS' complemento della declinazione o sia distanza polare, e l'angolo ZPS' misurato dalla differenza di ascensione retta E*d*, tra quella del meridiano del luogo nell'istante dell' osservazione e quella dell'astro; laonde si potrà determinare ZS' (279) distanza zenittale, il cui complemento sarà l' altezza.

313. *Determinare l'amplitudine di un astro.* In quanto poi all'altra coordinata sferica relativa alla posizione dell' astro rispetto all' orizzonte, cioè in quanto all' amplitudine, se l' astro è all' orizzonte, nel triangolo sferico *ba*S rettangolo in *b*, nel quale è noto il lato *b*S de-

clinazione dell' astro, e l'angolo *ba*S altezza dell' equatore sull' orizzonte, o vero complemento della latitudine, sarà facile determinare l'ipotenusa *a*S (281,1°). O pure pel triangolo sferico PSO rettangolo in O, saranno noti PS complemento della declinazione, e PO latitudine del luogo, e sarà egualmente cosa agevole rinvenire il valore di OS (281,2°) il cui complemento sarà l' amplitudine richiesta.

E se l'astro fosse in altezza, basterà nel detto triangolo ZPS' calcolare l'angolo PZS' (277) o sia l' azzimutto, del quale il complemento darà *ha* amplitudine dell' astro in altezza.

314. *Della posizione dello zenit.* Dall'aver determinata la posizione degli astri rispetto all'equatore o rispetto all'eclittica, e molto più dall' averla determinata rispetto ad entrambi, sarebbe semplicissima cosa pervenire alla conoscenza di quella dello zenit, se questo come le stelle fisse avesse una posizione stabile nella sua sfera; e ciò mediante la soluzione d'un triangolo sferico. Ma siccome per la rotazione della terra lo zenit o sia il vertice di un luogo descrive in 24 ore un parallelo all'equatore celeste a tanti gradi di declinazione quanti sono i gradi della latitudine del luogo (117 e 93); o ciò ch' è lo stesso, percorre in 24 ore tutti i 360° di ascensione retta; e siccome d'altronde la verticale è sempre perpendicolare all'orizzonte, di cui lo zenit è polo, e quindi il determinare la posizione degli astri rispetto all'orizzonte varrà lo stesso che averla determinata in riguardo allo zenit; così potremo essere in grado di conoscerne la situazione in un dato istante, solo trovandoci provveduti di strumenti atti a misurare la distanza angolare degli astri tra loro, e dall' orizzonte; ed avendo una idea chiara delle varie specie di tempo, e l'istrumento opportuno a misurarlo.

315. Questa misura del tempo però, potendo esser relativa a tutti i meridiani possibili sarà utile per semplicità ne' calcoli riferirla al primo meridiano (104), tanto maggiormente che le carte idrografiche di cui facciamo uso al presente sono relativamente a tal meridiano costruite; e per esso sono calcolate le effemeridi astronomiche, nelle quali trovansi calcolate le posizioni degli astri a diversi periodi secondo il bisogno richiede, e pubblicansi a Parigi in ogni anno, sempre con anni tre di anticipazione, sotto il titolo di *Connaissance des temps.*

316. Quindi prima d'inoltrarci ad indicare il procedimento de' diversi calcoli astronomici indispensabili alla nautica, sarà d'uopo occuparci 1.° degli strumenti onde misurare da lungi le distanze angolari; 2.° del tempo, e dello strumento atto a misurarlo; 3.° del maneggio della *Connaissance des temps.*

LEZIONE XXX.

Degli strumenti a riflessione.

317. Se gli astronomi possono osservare direttamente le altezze, ed ogni sorta di distanza angolare fra gli astri mediante istrumenti a livello ed a filo a piombo, ed ottenerne la più grande precisione; i marini, su delle navi incessantemente dalle onde agitate non potendo far uso di strumenti stabilmente situati, e di determinata posizione; han d'uopo avvalersi di strumenti maneggevoli non solo, ma sempre di rapportare le altezze degli astri all'orizzonte sensibile, onde giugnere alla conoscenza della posizione del loro zenit rispetto agli astri; e però sono nella necessità di adottare esclusivamente degli strumenti a riflessione pel conseguimento del loro scopo.

E poichè gli strumenti a riflessione poggiano singolarmente sulla proprietà della luce di rimbalzare in tutto o in parte da qualunque corpo essa incontra, per la quale immensa flessibilità si riflette ancora dagli specchi piani; stimiamo, prima di indicare la costruzione di tali strumenti, dire alcuna cosa intorno la luce ed i principî da' quali la loro costruzione dipende.

318. Dicesi *luce* la sostanza imponderabile che respinta dalle superficie de' corpi all'occhio li rende visibili; e la cui assenza produce l'oscurità o le tenebre.

Se chiamiamo m la massa di una molecola lucida, e v la sua velocità, l'espressione della sua forza sarà fmv; ma v è quasi infinita (77) dunque m dev'essere assolutamente infinita, senza di che l'eccessiva quantità di moto della luce distruggerebbe nell'incontro anche un ostacolo della più grande resistenza; mentre in vece la veggiamo cedere e

rimbalzare in tutte le direzioni possibili da ogni corpo opaco, anche il più lieve che sia.

319. L'idea della luce comprende più cose; cioè i corpi che la diffondono, i mezzi che la trasmettono, gli ostacoli che la respingono, e l'organo che la riceve.

Ogni punto del corpo da cui parte la luce, chiamasi in generale *punto lucido* o *raggiante*: esso dicesi *luminoso* allorchè emana una luce propria, ed *illuminato* quando sparge una luce d'altronde ricevuta. Parta però la luce da un punto luminoso o illuminato, ciascuno dei suoi raggi procede sempre in linea retta; poichè non è sollecitato da forze diverse nel suo cammino, per le quali seguir dovesse un moto curvilineo. La sola forza di attrazione che potrebbe produrre questo effetto, noi sappiamo che agisce in ragion delle masse (44), ed essendo la massa nella luce infinitamente piccola (318), siegue che se la forza attrattiva non sia infinitamente grande, l'effetto sarà insensibile, e sarà vinto o distrutto dalla velocità quasi infinita della luce.

Il mezzo che trasmette la luce si dirà *libero* se manca in esso ogni forza estrinseca alla luce, che la signoreggi e ne diminuisca la quantità; si dirà *diafano uniforme*, se una ugual forza agisce in lui di continuo, e la diminuisca ad ogni passo ugualmente; e finalmente dicesi *diafano vario* se è tale che contenga più forze eterogenee le quali agiscano sopra di essa, e l'assoggettino ad ineguali diminuzioni.

Nel mezzo libero la luce muovesi sempre in linea retta, perchè mancando ogni forza estrinseca, la propria inerzia le impedisse di cangiar la primitiva direzione.

Nel mezzo diafano uniforme la luce muovesi parimenti in linea retta, perchè le forze estrinseche essendo uguali, l'azione dell'una è bilanciata continuamente e distrutta dalla uguale e contraria azion dell'altra, onde la luce si muoverà come se mancasse ogni forza.

Nel mezzo poi diafano vario, la luce cangia direzione ogni qualvolta cangia il mezzo, dappoichè le forze estrinseche essendo ineguali, l'azione dell'una ne' punti di cangiamento vince la contraria azione dell'altra, onde il raggio, costretto ad obbedire alla maggiore, declina: e questo fenomeno dicesi *rifrazione*.

320. Gli ostacoli che respingono la luce sono specialmente i corpi non diafani ovvero opachi, sebbene anche i corpi diafani la respingano in talune circostanze.

I corpi opachi distinguonsi in due classi: gli uni che hanno le superficie inuguali e scabrose come gli alberi, i monti, le muraglie ec. gli altri che le hanno levigate ed uguali come i cristalli levigati, i metalli bruniti, ec.

I primi rigettando i raggi degli oggetti luminosi o illuminati, li dividono, gli sparpagliano e li riflettono in tutte le direzioni; onde, guaste e disperse dalla riflessione irregolare e confusa le immagini degli oggetti, all'occhio giunge la sola immagine del corpo opaco.

All'incontro i secondi respingendo i raggi con l'ordine e la simmetria medesima che ebbero nel partire dall'oggetto, non solo dipingono nell'occhio sè stessi, ma vi riflettono ancora le immagini degli altri oggetti, conservando loro la propria configurazione.

L'organo che riceve la luce è l'occhio, la cui costruzione e descrizione appartenendo piuttosto ai fisiologi, noi la trascureremo, ed affine di non perder di vista il nostro oggetto, passeremo ad esporre il principio da cui la costruzione degli strumenti a riflessione totalmente dipende.

321. Gli strumenti a riflessione di cui si fa uso in mare sono principalmente l'ottante il sestante, ed il cerchio: essi servono a misurare le distanze fra gli astri, e le loro altezze dall'orizzonte.

La costruzione di questi strumenti è fondata su di un principio, che somministra l'esperienza, e dal quale sorgono tutti i fenomeni della catottrica; cioè che il raggio incidente, ed il raggio riflesso sono in un medesimo piano con la normale inalzata dal punto d'incidenza al piano riflettente, e formano con essa angoli eguali. Vale a dire che se un raggio di luce DC (*fig. 51*) incontri un piano ben livigato AB, dal punto C d'incontro s'innalzi la normale FC, e per tali rette DC e CF si supponga passare un piano; in questo dovrà trovarsi il raggio riflesso CE, formando l'angolo ECF eguale a DCF, e quindi l'angolo DCA d'incidenza eguale all'angolo ECB di riflessione.

Siegue da ciò che se da un punto luminoso D si abbassi la perpendicolare DA al piano AB, e si prolunghi in d, finchè Ad sia eguale

ad AD, per trovare la posizione del raggio riflesso basterà condurre dal punto *d*, e pel punto d'incidenza C la retta *d*C, la quale prolungata darà il raggio riflesso CE. Poichè gli angoli DCA, ed AC*d* sono eguali, e l'angolo ACD è uguale ad ECB, sarà l'angolo *d*CA uguale ad ECB, e quindi EC il raggio riflesso di DC.

Dunque tutti i raggi provenienti da D vengono riflessi dallo specchio partendo sempre dal punto *d*; d'onde siegue che i raggi riflessi giungendo all'occhio dell'osservatore sembrerà che direttamente emanino da *d*; e che gli oggetti sieno situati dietro la sua superficie, ad una distanza eguale a quella che hanno essi realmente dalla superficie anteriore.

Per determinare il luogo in cui i differenti punti visibili di un oggetto debbono essere rappresentati nello specchio, si abbassi da ciascuno di essi la perpendicolare sulla superficie anteriore, o sul suo prolungamento, e si continui di altrettanto dall'altra parte: tali rette avendo ciascuna la medesima lunghezza dall'una e dall'altra parte del piano riflettente, termineranno da una parte all'oggetto e dall'altra parte alla immagine, e debbono in conseguenza avere la medesima situazione, ed uguali dimensioni; ma l'aspetto capovolto.

322. Allorchè la posizione dell'occhio innanti ad uno specchio piano è data, tutte le rette che dai punti dell'immagine all'apertura della pupilla vengono tirate, incontrano la superficie riflettente, e rappresentano i raggi per mezzo di cui si veggono i punti dai quali sembrano provenire.

Tali principî, che sono conseguenze immediate dell'eguaglianza degli angoli d'incidenza e di riflessione, somministrano i dati necessari alla soluzione di tutti i problemi che possano proporsi sugli specchi piani, sia che un solo se ne consideri, sia che se ne riuniscano più per ottenere dei risultamenti più o meno complicati. Rimane solamente ad osservare che nelle circostanze relative a questa seconda ipotesi, le immagini formate in uno degli specchi agiscono relativamente agli altri come un oggetto che fosse ivi situato.

323. Se si supponga che lo specchio AB (*fig.* 52) giri intorno al punto C, e prenda la posizione A'B', EC non potrà essere più il raggio riflesso dell'incidente DE, ma lo sarà di un altro come SC. Ed avremo

che l'angolo SCD formato dai due raggi incidenti è doppio di B'CB, che è l'inclinazione dato allo specchio.

L'angolo DCE $= 180° - 2ECB = 180° - 2ECB' - 2B'CB$, e l'angolo SCE $= 180° - 2ECB'$, sarà l'angolo SCE — DCE ossia SCD' $= 180° - 2ECB' - 180° + 2ECB' + 2B'CB = 2B'CB$.

324. Per misurare adunque la distanza angolare dal punto D al punto S, basterà assicurarsi che CE dopo essere stato il raggio riflesso di D sia divenuto, a causa del movimento dato allo specchio, il riflesso dell'altro raggio CS: allora il doppio della quantità angolare della rotazione dello specchio sarà la distanza cercata.

Ciò si ottiene guardando uno dei punti direttamente, e l'altro per la riflessione di due specchi, situati in modo che si vedano i due punti nel medesimo tempo.

A tale effetto si situi sur uno dei punti di CE (*fig. 53*) un secondo specchio FG a metà amalgamato, perpendicolare come il primo allo stesso piano.

Il raggio riflesso CE dell'incidente CD, incontrando lo specchio FG prova una seconda riflessione, e dirigesi secondo EO, facendo l'angolo CEF uguale all'angolo GEO; mentre la parte trasparente lascerà passare l'immagine dello stesso punto D secondo OED'.

Il secondo specchio restando fisso, e l'occhio trovandosi in uno dei punti di EO, è evidente che se lo specchio AB prenda la posizione A'B', l'occhio stesso vedrà successivamente le seconde immagini dei punti D ed S, e che il movimento angolare dello specchio AB sarà eguale alla metà dell'angolo DCS formato dai raggi che partono da tali punti D ed S.

Intanto per questo movimento l'immagine del punto D discenderà nello specchio FG; poichè dopo la rotazione dello specchio AB, CE non può essere più il raggio riflesso dell'incidente DC, di modo che l'occhio situato in O non potrà vedere l'immagine del punto D, se non fino a che il primo incidente DB' incontrerà il primo specchio A'B' nella parte CB', onde il suo riflesso B'G incontri lo specchio nella parte EG; giacchè allora avviene che il secondo raggio riflesso GO potrà passare pel punto O, e far vedere l'immagine del punto D in D'' sempre al di sotto della prima immagine D'.

Ma continuando la rotazione dello specchio AB non si potrà più vedere dal punto O l'immagine del punto D, nè in D'' nè altrove; e per questa ragione si è fatto lo specchio FG a metà trasparente, affinchè per mezzo della visuale OD' potesse portarsi il punto S a coincidere col punto D o sia D', ad onta di esser la sua immagine uscita dal campo dello specchio FG.

Per la qual cosa avremo, che de' due punti tra' quali vuolsi misurare la distanza angolare, sarà D' veduto nella sola parte trasparente, ed S nella sola parte amalgamata, ad eccezione del caso che S sia molto luminoso, come per esempio il sole, la cui luce nel passare a traverso la parte trasparente, non s'illanguidisce che di poca quantità; ma in tutti i casi ne' quali S è tale da non esser più visibile a traverso della parte trasparente, per ottenere la coincidenza de' punti D' ed S, bisognerà far cadere l'immagine di S sulla linea di divisione delle due parti dello specchio FG.

325. Da ciò risulta il metodo di misurare le distanze angolari degli oggetti col punto D veduto direttamente da O attraverso della parte trasparente del piccolo specchio FG; e facendo coincidere una seconda immagine di questo punto nel medesimo specchio, seguendo il cammino DCEO. Dopo ciò per mezzo di una linda CBI si misura l'angolo BCB', che è il moto angolare conveniente allo specchio AB, acciò la seconda immagine di un altro punto S coincida col punto D': il doppio di questo movimento sarà precisamente eguale all'angolo SCD'.

Gli strumenti a riflessione danno quest'angolo, lo specchio AB è portato in essa da una linda CI, di cui il movimento angolare è uguale a quello del grande specchio: essa indica sopra un arco circolare IK la grandezza di questo movimento, e per conseguenza la distanza SCD.

326. Allorchè i punti D ed S sono ad una sufficiente distanza, per esempio due astri, la perpendicolare CX e l'angolo CD'E son nulla, ed il raggio D'C può considerarsi come parallelo al visuale D'EO egualmente che l'altro DC. E quindi l'angolo D'CE sarà eguale all'angolo CEO, ed anche ECB=FEC, poichè $DCA + DCE + ECB = 180° = CEF + CEO + OEG$, o sia $DCE + 2ECB = CEO + 2CEF$; ma $DCE = CEO$, dun-

que 2ECB = 2CEF, e quindi ECB = CEF. Dalla qual cosa deriva che quando si faranno coincidere il punto D e la propria immagine, gli specchi saranno paralleli: l'inclinazione che si dà loro in seguito è uguale alla metà dell'angolo osservato.

Dell'ottante e del sestante.

327. L'*ottante* o il *sestante* è un settore di cerchio costruito in modo da riunire la solidità e la leggerezza, e prende il suo nome speciale dall'arco che lo termina, secondo questo sia l'*ottava* o la *sesta* parte della intera circonferenza del cerchio; sopra di esso che vien detto *lembo dello strumento* o *arco graduato*, sono praticate le divisioni di mezzo grado ciascuna, le quali nelle osservazioni si valutano per gradi interi, onde risparmiarne l'operazione di raddoppiare l'angolo in ciascuna osservazione, giusta i principî di già esposti. Ogni grado è per lo più diviso in 3 parti uguali, cioè di 20 minuti ciascuna, e la suddivisione si può spingere fino a qualunque numero di secondi, per mezzo di un verniero.

328. *Della linda.* Chiamasi *linda* un regolo mobile intorno ad un asse fissato esattamente al vertice del settore; altrimenti la menoma inesattezza produrrebbe degli errori tanto maggiori quanto il raggio del settore più piccolo si fosse.

L'estremità inferiore della linda ha un'apertura quadrangolare di cui due lati sono paralleli all'arco graduato: l'uno di essi è tagliato a scarpa in modo concentrico a questo arco.

Al di sotto di questa estremità evvi una molla che senza impedire il movimento della linda tiene continuamente la scarpa applicata all'arco: vi è ancora una vite di pressione per fissare la linda a qualunque punto della divisione si voglia.

Si aggiunge di più a tutti gli strumenti che ora si costruiscono una *vite di richiamo*: essa è posta all'estremità della linda dalla parte dell'apertura quadrangolare. Il suo uffizio è di far scorrere la linda lentamente, ed uniformemente dopo averla fissata con la vite di pressione.

329. *Del verniero.* Per suddividere un arco od una retta nelle sue parti minori si sono inventati diversi metodi ed artifizi fra i quali il *verniero* dal nome stesso dell'autore (Vernier) è il più esatto, ed il più generalmente adottato. Prima però d'indicarne la costruzione è necessario premettere il seguente principio.

Se un arco od una retta di qualunque data estensione si divida una volta in un numero n di parti eguali, ed un'altra nel numero $n-1$, sarà ciascuna parte dell'arco diviso in n, minore per $\frac{1}{n}$ di ciascuna parte dell'arco diviso in $n-1$. E quindi se ciascuna parte dell'arco rappresenti 20′ bisognera per avere i minuti primi prendere pel verniero 19 parti eguali di quelle dell'arco, e dividerle in 20 parti eguali: allora ogni spazio dell'arco del settore sarà maggiore di ogni spazio del verniero di 1′.

Per meglio intendere questa verità chiamiamo A, la retta o l'arco diviso ne' due modi diversi, avremo

$$\frac{A}{n-1}-\frac{A}{n}=\frac{An-An+A}{n(n-1)}=\frac{A}{n(n-1)}$$

Or essendo A eguale al prodotto di $n-1$ pel numero de' minuti che si contengono in ciascuna parte del lembo, che chiameremo m, sarà $\frac{A}{n(n-1)}=\frac{(n-1)m}{n(n-1)}=\frac{m}{n}$. Vale a dire *la frazione indicata dal verniero è sempre eguale a quella rappresentata dal numero de' minuti dell' infima parte del lembo, diviso pel numero delle parti in cui trovisi ripartito il verniero:*

cioè se

$$\left.\begin{aligned}\frac{m}{n}&=\frac{20'}{80}=\frac{1}{4}=15''\\ \frac{m}{n}&=\frac{20'}{60}=\frac{1}{3}=20''\\ \frac{m}{n}&=\frac{20'}{40}=\frac{1}{2}=30''\\ \frac{m}{n}&=\frac{20'}{20}=1'\\ &\text{ec. ec.}\end{aligned}\right\}\text{ supposta } m=20'$$

Quando per lo contrario sia da costruirsi il verniero, e data la quantità ch'è destinata a dinotare, *per conoscere il numero* $n-1$ *delle*

parti del lembo che debbonsi dividere in n *parti eguali sul verniero, basterà moltiplicare il denominatore della frazione richiesta pel numero de' minuti rappresentati da* m *infima parte del lembo, minorando di una unità il prodotto:* cioè, chiamando v la frazione, $\frac{A}{n(n-1)} = \frac{m}{n}$ si cangerà in $v = \frac{m}{n}$; ed $n = \frac{m}{v}$

si supponga $m = 15'$

se $v = 5'' = \frac{1}{12}$ sarà $n = 15' : \frac{1}{12} = 15' \times 12 = 180$, ed $n - 1 = 179$

$v = 6'' = \frac{1}{10} \ldots n = 15' : \frac{1}{10} = 15' \times 10 = 150$, ed $n - 1 = 149$

$v = 10'' = \frac{1}{6} \ldots n = 15' : \frac{1}{6} = 15' \times 6 = 90$, ed $n - 1 = 89$

$v = 15'' = \frac{1}{4} \ldots n = 15' : \frac{1}{4} = 15' \times 4 = 60$, ed $n - 1 = 59$

$v = 20'' = \frac{1}{3} \ldots n = 15' : \frac{1}{3} = 15' \times 3 = 45$, ed $n - 1 = 44$

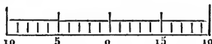
ec. ec.

330. La divisione del verniero per gli strumenti destinati agli usi di mare, non devesi però spingere tant'oltre: basterà ottenerne i 30″ per un sestante di 9 o 10 pollici di raggio, ed i soli minuti primi per un cerchio il cui raggio non oltrepassi i 5 pollici; altrimenti, ha dimostrato l'esperienza, che invece di averne una maggiore esattezza, si avrà nella lettura dell'arco un'incertezza più grande della tenue precisione che si volea conseguire; e ad onta che s'impiegassero all'uopo de' microscopî semplici o composti. Derivi ciò dalla parallasse personale, pel modo di presentare il lembo all'occhio, o da diversità nell'organo della vista; è certo che quando la divisione troppo si estende, ed i tratti sul verniero, per la picciolezza del raggio trovansi assai vicini, un medesimo angolo osservato sarà difficilmente letto da tutti per la medesima quantità.

Tali divisioni soglionsi segnare sul verniero in diversi modi: qualche volta come quelle del lembo da dritta a sinistra, da 5 in 5, disposte così:



e spesso situate simmetricamente rapporto allo zero: allora la metà delle suddivvisioni si computa dal concorso delle linee della sinistra, e l'altra da quello delle linee della dritta.



La retta tirata dal vertice del settore allo zero del verniero chiamasi *linea di fede* o *indice :* essa descrive esattamente gli angoli che con lo strumento si misurano, ed è affidata alla linda.

331. Da quanto si è finora detto siegue, che se facciamo coincidere lo zero del verniero con lo zero del lembo, dovrà ancora, nella prima ipotesi, coincidere la ventesima ed ultima divisione del verniero con la diciannovesima del lembo; mentre nella seconda, se collima lo zero nessun' altra linea troverassi alla medesima condizione; e per vederne coincidere due del verniero con due del lembo, bisognerà ricorrere ai due 10: sì nell' una che nell' altra ipotesi intanto nessuna di tutte le altre divisioni intermedie dell' uno dei due archi potrà trovarsi a corrispondere con alcuna di quelle dell'altro.

E per fare che la prima dopo lo zero del verniero coincida con la prima dopo lo zero del lembo, bisognerà che l' indice sia spinto di $\frac{1}{n} = \frac{1}{20} = 1'$ nel senso in cui la graduazione del lembo procede; e così di altrettanto per far che la coincidenza passi dalla prima alla seconda divisione, ec. Laonde, dopo aver letto sul lembo dello strumento i gradi, e le ventine di minuti, quantità da noi supposta come l'infima delle divisioni sull' arco segnate, passeremo a leggere sul verniero i minuti primi da uno fino a diciannove, che possono appartenersi all' angolo misurato; e ciò con la semplice ispezione di quale sia la lineetta di divisione del verniero che trovisi a coincidere con una di quelle del lembo.

332. *Degli specchi.* Al vertice dell' angolo rettilineo del settore perpendicolarmente al piano dello strumento, e presso a poco alla linea

di fede vien situato uno specchio, detto *grande specchio,* fissato sulla linda, e per essa mobile intorno al vertice suddetto.

Questo specchio non debbe avere che tre punti di comune col piano sul quale poggia: esso viene fissato sulla linda in diversi modi, ma tutti consistono a mettere il suo piano perpendicolarmente a quello dello strumento: e serve a ricevere i raggi di luce degli oggetti e a rifletterli nel piccolo specchio.

Il *piccolo specchio* vien fissato sul lato o raggio opposto a quello cui corrisponde il principio delle divisioni, a tre o quattro pollici di distanza dal vertice menzionato.

Esso è più piccolo del primo, ed è perciò chiamato piccolo specchio. Una sua metà è amalgamata, e l'altra trasparente. La montatura di esso è costruita in modo da porre il suo piano perpendicolare a quello dello strumento. Vi è inoltre una vite dietro di questo, la quale serve a fare girare lo specchietto intorno ad un asse perpendicolare anche esso al piano dello strumento.

Questo *piccolo specchio* riceve i raggi riflessi del *grande specchio;* e li riflette all'occhio dell'osservatore per mezzo della sua parte amalgamata; mentre l'osservatore attraverso della parte trasparente vede la immaggine diretta dell'altro oggetto dal quale vuolsi la distanza angolare del primo.

333. *Del traguardo e del cannocchiale.* Sull'altro raggio opposto a quello del piccolo specchio si pone un traguardo, o un cannocchiale in modo che il suo asse corrisponda al mezzo della linea, che sul piccolo specchio separa la parte amalgamata dalla trasparente.

Il *traguardo* è ordinariamente una piccola lastra di ottone con due fori, dei quali uno è esattamente all'istessa distanza dal piano dell'istrumento con la linea di separazione delle due indicate parti del piccolo specchio, e l'altro corrisponde al mezzo della parte trasparente.

L'uso del cannocchiale deve essere preferito a quello del traguardo; poichè nel cannocchiale il raggio visuale è assoggettato al piano dello strumento, e gli oggetti si rendono più sensibili e meglio terminati.

Nei sestanti costrutti con cura l'anello che porta il cannocchiale ha due viti diametralmente opposte, con l'aiuto delle quali si può rendere l'asse del cannocchiale parallelo al piano dell'istrumento.

334. *Dei vetri colorati.* Tra il grande e piccolo specchio vengono disposti sul lato del sestante, sul quale sta il secondo di essi, tre o quattro vetri colorati incastrati in alcuni quadri di ottone.

335. Le leggi di catottrica, ed i principî precedentemente sviluppati sarebbero sufficienti per la costruzione degli strumenti a riflessione, ma siccome non si possono usare in mare le superficie ben livigate di metallo, poichè questi si ossiderebbero, così è necessario di servirsi degli specchi di cristallo; i quali avendo una spessezza diafana, i raggi di luce che vi s'introducano prima di potersi riflettere al di fuori della parte anteriore subiscono una doppia rifrazione, quindi fa d'uopo occuparci della forma che deve avere lo specchio, affinchè l'angolo di riflessione risulti eguale all'angolo d'incidenza, ad onta della doppia rifrazione sofferta.

Rappresenti ABCD la grossezza di uno specchio, e sia SO un raggio di luce che ne incontri la superficie anteriore. Pei principî stabiliti l'angolo SOA è uguale ad FOD; ma il raggio di luce introducendosi nello specchio prenderà la direzione OH, e si rifletterà nel mezzo diafano seguendo HK, facendo l'angolo OHB = KHC; indi da K uscirà fuori dello specchio nella direzione KL. È chiaro che se le due facce AD, e BC dello specchio sono parallele l'angolo SOA sarà eguale ad LKD. Imperciocchè se s'innalzano dai punti K ed O delle perpendicolari MO, ed NG, i due triangoli rettangoli ORH, e KHG sono eguali, e perciò ROH è uguale ad HKG.

Or noi abbiamo per principio di *diottrica* che l'angolo formato da un raggio incidente e l'asse della rifrazione serba un rapporto costante con l'angolo che risulta dal raggio refratto con l'asse medesimo; adunque pure l'angolo SOA avrà un rapporto costante con ROH, e similmente LKD con HKG; e poichè trattasi dello stesso raggio di luce nello stesso mezzo diafano, avremo SOA : ROH :: LKD : HKG, ed essendo eguali tra loro i conseguenti ROH, ed HKG saranno ancora eguali gli antecedenti SOA, ed LKD.

Laonde resta dimostrato che per sussistere il principio generale di catottrica di essere l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione, ad onta della doppia rifrazione che subisce il raggio di luce nel corpo dia-

fano dello specchio di cristallo, è d'uopo che le facce anteriore e posteriore dello specchio sieno parallele.

336. Bisognerà dunque prima di ogni altra cosa verificare se esista il parallellismo delle facce di entrambi gli specchi dello strumento. Cominceremo perciò dal verificare se le due facce del grande specchio sono parallele.

Si scelgano stando a terra due luoghi ben distinti dei quali la distanza angolare sia grande come di 120° per esempio, e dopo esserci assicurati del perpendicolarismo degli specchi come or ora diremo, e ancora dell'esatta posizione dell'asse del cannocchiale, misureremo l'angolo formato all'occhio dell'osservatore mercè un numero di osservazioni incrociate, e facendo attenzione che il contatto sul campo del cannocchiale accada sempre nel preciso mezzo de' fili. Fatto ciò si toglierà il grande specchio dalla sua incastratura, e vi si rimetterà capovolto nel senso della sua grossezza; e si ripetano con tutta similitudine le osservazioni fatte la prima volta. Se il risultamento sarà lo stesso, le due facce saranno parallele, perocchè non avendo riconosciuto diversità nell'angolo misurato, la deviazione del raggio riflesso sarà stata la stessa in entrambi i sensi della grossezza dello specchio, e però le facce di esse saranno parallele. Se per lo contrario v'è differenza tra l'una e l'altra misura dello stesso angolo, la deviazione del raggio riflesso essendo stata diversa è d'uopo che lo specchio sia prismatico; e la metà della differenza tra le due misure dell'angolo di prova indicherà l'errore corrispondente all'angolo misurato che abbiamo supposto di 120°.

337. Conosciuto per tal modo l'errore cagionato da questa imperfezione dello specchio sopra un angolo di 1' fatto dalle sue facce, si troverà facilmente quello che corrisponde ad ogn'altro angolo per mezzo di una tavola calcolata sulla seguente formola.

S'immagini che le due facce dello specchio formino un angolo MLN, cioè che sieno talmente convergenti dalla parte KC che protratte vadano ad unirsi in L. Sia AI un raggio di luce che incontri lo specchio nel punto I: quivi il raggio si rifrangerà secondo IB, accostandosi all'asse della rifrazione, ch'è la perpendicolare al piano refringente nel punto

d'incidenza I (*fig.* 53); ma sempre rimanendo nello stesso piano con esso e col raggio di luce AI. Dal punto B si rifletterà secondo BK facendo l'angolo della riflessione CBK eguale all'angolo dell'incidenza IBG. Finalmente in K si rifrangerà di nuovo scostandosi dall'asse di rifrazione, poichè passa da un mezzo più denso in un mezzo più raro; e si dirigerà secondo KD.

S'intendano tirati i due assi delle rifrazioni EG ed FC. Quando NL non è parallela ad ML sarà FCG $= 90° + L$, ed EGC $= 90° - L$, quindi FCG $-$ EGC $= 2L$, e similmente GIB $-$ BKC $= 2L$, e GIB $- 2L =$ BKC. Or si ponga AIE $-$ DKF $= x$. Pel rapporto costante degli angoli AIE, DKF con gli angoli GIB, BKC si ha sen AIE : sen GIB :: sen DKF : sen BKC, e sen AIE $-$ sen DKF : sen GIB $-$ sen BKC :: sen AIE : sen GIB; ma sen AIE $-$ sen DKF $=$ sen AIE $-$ sen (AIE $- x$), e sen GIB $-$ sen BKC $=$ sen GIB $-$ sen (GIB $- 2L$) adunque sostituendo avremo sen AIE $-$ sen (AIE $- x$) : sen GIB $-$ sen (GIB $- 2L$) :: sen AIE : sen GIB

D'altronde sen (AIE $- x$) $=$ sen AIE cos x $-$ sen x cos AIE, ed essendo x un arco picciolissimo potremo considerarne il coseno confuso col raggio, ed il seno con l'arco. E facendo lo stesso ragionare per sen (GIB $- 2L$), sostituendo avremo

sen AIE $-$ sen AIE $+ x$ cos AIE : sen GIB $-$ sen GIB $+ 2L$ cos GIB :: sen AIE : sen GIB, ossia

x cos AIE : $2L$ cos GIB :: sen AIE : sen GIB

$x : 2L$ :: tan AIE : tan GIB . . . . . . (φ).

Si faccia sen AIE : sen GIB :: m : 1 sarà

$$\text{sen GIB} = \frac{\text{sen AIE}}{m}$$, ed elevando a quadrato

$$\text{sen}^2 \text{GIB} = \frac{\text{sen}^2 \text{AIE}}{m^2}$$ o sia

$$\cos^2 \text{GIB} = 1 - \frac{\text{sen}^2 \text{AIE}}{m^2}$$, e perciò

$$\cos \text{GIB} = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \text{AIE}}{m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{m^2 - \text{sen}^2 \text{AIE}}}{m}$$, e ritornando alla proporzione (φ)

$x : 2L :: \frac{\text{sen AIE}}{\text{cos AIE}} : \frac{\text{sen GIB}}{\text{cos GIB}}$, quindi sostituendo

$$x : 2L :: \frac{\text{sen AIE}}{\text{cos AIE}} : \frac{\frac{\text{sen AIE}}{m}}{\frac{\sqrt{m^2 - \text{sen}^2 \text{AIE}}}{m}}$$ vale a dire

$$x : 2L :: \frac{\text{sen AIE}}{\text{cos AIE}} : \frac{\text{sen AIE}}{\sqrt{m^2 - \text{sen}^2 \text{AIE}}}$$, e perciò

$$x = \frac{2L\text{sen AIE}}{\text{cos AIE}} : \frac{\text{sen AIE}}{\sqrt{m^2 - \text{sen}^2 \text{AIE}}} = \frac{2L\text{sen AIE}\sqrt{m^2 - \text{sen}^2\text{AIE}}}{\text{cos AIE sen AIE}} = \frac{2L\sqrt{m^2 - \text{sen}^2\text{AIE}}}{\text{cos AIE}}$$

$$x = 2L\sqrt{\frac{m^2 - \text{sen}^2 \text{AIE}}{\cos^2 \text{AIE}}} = 2L\sqrt{\frac{m^2 - 1}{\cos^2 \text{AIE}} + 1}$$; ed inoltre essendo

cos AIE = sen AIM, sarà pure $x = 2L\sqrt{\frac{m^2 - 1}{\text{sen}^2 \text{AIM}} + 1}$

Intanto la diottrica ci somministra per costante esperienza che nei cristalli $m : 1 :: 31 : 20$ e perciò $m = \frac{31}{20}$, e quindi sostituendo il valore di m si otterrà

$$x = 2L\sqrt{1 + \frac{2{,}4025 - 1}{\text{sen}^2 \text{AIM}}} = 2L\sqrt{1 + \frac{1{,}4025}{\text{sen}^2 \text{AIM}}}$$

Donde si vede che allorquando le facce di uno specchio di cristallo convergono tra loro, si avrà per l'analogia (φ) che *l' errore sull' angolo misurato sta al doppio dell' angolo formato dalle due facce dello specchio, come la tangente dell' angolo fatto dal raggio incidente con l' asse della rifrazione, all' angolo refratto*, e che volendo calcolare questo errore, si ha che *il rapporto dell' angolo d' incidenza a quello di riflessione per un raggio di luce qualunque, sarà espresso dal doppio dell' angolo della inclinazione delle facce moltiplicato per* $\sqrt{1 + \frac{1{,}4025}{\text{sen}^2 \text{angolo d'incidenza}}}$.

Col mezzo di tal formola è stata calcolata la Tav. III., nella quale si è supposto di 1' l'angolo delle due superficie dello specchio, è di 80° quello fatto dall' asse del cannocchiale col piano del piccolo specchio, come suol generalmente praticarsi; e quando lo strumento fosse diver-

samente condizionato, sarà facile per mezzo della Tav. IV. formare altra tavola analoga alla Tav. III.; sempre supponendo di 1′ l'angolo delle due superficie, come meglio s'intenderà dall'esempio nell'*Appendice*.

338. *Parallellismo delle facce del piccolo specchio.* Nel piccolo specchio essendo costanti il raggio incidente ed il riflesso, se vi è difetto di parallelismo nelle due facce, l'errore che ne deriva sarà sempre lo stesso e nel medesimo senso, nel situare gli specchi paralleli e nel misurare la distanza; quindi è inutile averne conto.

339. *Parallellismo delle facce de' vetri colorati.* Sarà ancora necessario verificare se le facce anteriore e posteriore del vetro colorato sieno parallele. Si portino a contatto le due immagini del sole: si rivolti il vetro, e si osservi se il contatto continua.

340. *Del cerchio di Troughton.* Questo elegante e comodissimo strumento, consiste in un cerchio di ottone che ha circa 5 pollici di raggio, diviso in tutta la periferia di grado in grado e terze parti di essi; cioè in 360° da una parte dello zero è 360° dall'altra; però le cifre indicanti i gradi giungono fino al 140 da ciascuna delle due parti. È munito di tre raggi o linde invariabilmente connesse, ed equidistanti fra loro: girano simultaneamente intorno al centro del cerchio, trasportando seco loro il grande specchio, collocato dall'altra parte del cerchio, come lo sono il cannocchiale ed il piccolo specchio, entrambi inamovibili. I tre raggi distinti con le lettere A, B, C, hanno i rispettivi vernieri divisi analogamente al cerchio, onde dare i 20 secondi. Essi sono disposti talmente, che quando il raggio A è sullo zero del cerchio, gli specchi sono assai prossimamente paralleli tra loro, ed i due altri raggi B, C, distano al di qua e al di là dello zero per 240° del lembo.

341. I principî su' quali è costruito sono precisamente i medesimi di quelli già esposti pel sestante, per cui ne rimane solamente a far notare che il magistero delle tre linde equidistanti tra loro, rendendo nullo ogni errore di eccentricità, ne arreca il vantaggio di dispensarci di

dover fare una serie di osservazioni, per ogni distanza angolare che ne occorre misurare. Mentre questo sistema delle serie diretto ad annullare gli errori di eccentricità dello strumento, contiene anch'esso un errore, comechè assai minore e nelle piccole latitudini affatto insensibile, qual'è quello di supporre le differenze de' tempi proporzionali alle differenze in altezza; circostanza che solo si verifica nel concorso di dùe combinazioni, cioè che l'astro percorresse l'equatore, e l'osservazione venisse fatta dall'equatore terrestre. Laonde l'uso di questo strumento adottato per ordinanza su tutti i legni da guerra della Real Marina, oltre alla grande esattezza che offre in tutte le osservazioni, ne adduce il risparmio delle serie; le quali perciò dovranno solamente usarsi nelle osservazioni delle distanze lunari, essendo allora esse dirette a conseguire la simultaneità delle osservazioni fatte da tre osservatori diversi, come meglio in seguito s'intenderà.

LEZIONE XXXI.

Delle verifiche da farsi agli strumenti a riflessione.

342. *Perpendicolarismo degli specchi.* Per verificare se il grande specchio è perpendicolare al piano dell'istrumento, bisognerà situarsi in modo che si vegga in detto specchio una porzione del lembo: se l'immagine riflessa di tal porzione sembra la continuazione di sè stessa veduta direttamente a lato dello specchio, sarà una pruova evidente di esser desso perpendicolare al piano dell'istrumento. Se poi l'immagine riflessa del lembo appare più elevata, o più bassa di sè stessa veduta direttamente, sarà lo specchio inclinato in avanti o indietro, e mediante le viti che lo fissano sulla linda gli si darà la debita posizione.

343. Dopo verificata la posizione del grande specchio si verificherà il perpendicolarismo del piccolo specchio, o in modo simile a quanto si è praticato pel grande, oppure nel modo seguente:

Si rientrerà per mezzo della vite il cannocchiale finchè il suo campo sia diviso per metà dalla linea che separa la parte amalgamata dalla trasparente: indi mercè il movimento della linda si porterà l'immagine riflessa di un oggetto terrestre, messo a sufficiente distanza, come (*p. e.*)

l'orizzonte, a coincidere col medesimo direttamente veduto. Se l'oggetto e la sua immagine si stanno perfettamente in uno stesso piano in quell'istante, e per quante oscillazioni si diano all'istrumento non si stacchino, allora gli specchi saranno paralleli (326); e poichè il primo è perpendicolare al piano dell'istrumento lo sarà pure il secondo. Nell'altro caso per ottenere lo scopo si ricorrerà alle viti che lo attaccano all'istrumento.

344. Per assicurarci che le facce degli specchi siano piane si porti a contatto l'immagine riflessa di un oggetto con la diretta di un altro situato alla distanza almeno di 90°, e si faccia cadere il contatto sulla linea di separazione delle due parti del piccolo specchio: indi si fermi la linda, e si faccia scorrere tal contatto lungo la detta linea. Se le facce sono piane il contatto sarà costante in tutti i punti della linea.

345. *Verifica dell' asse ottico.* Dopo le verifiche fatte sugli specchi, passiamo ad esaminare se l'asse ottico del cannocchiale è parallelo al piano dell'istrumento. Prima di ogni altra cosa si giri il cannocchiale in modo che risultino i fili paralleli al piano dell'istrumento. Si facciano coincidere sopra uno dei fili i lembi di due oggetti messi alla distanza angolare almeno di 110°.

Indi fermata la linda, si mova lo strumento in guisa da far cadere il contatto sull'altro filo. Se il contatto si conserva, l'asse del cannocchiale sarà parallelo al piano dell'istrumento: se l'immagine dell'oggetto veduto per riflessione, e l'altro oggetto direttamente veduto si covrono, o si staccano l'asse ottico non sarà parallelo, e bisognerà condurvelo con le viti all'oggetto destinate.

346. *Determinazione dell' angolo de' fili.* Bisognerà ancora esaminare nel campo del cannocchiale l'angolo che fanno all'occhio dell'osservatore le due rette menate alla metà dei due fili. Si pongano per poco i fili perpendicolari al piano dell'istrumento: si portino le immagini dell'orizzonte a perfetta continuazione, e si legga all'arco. Poscia si muova la linda, e si porti ciascuna delle due immagini sopra uno dei fili. Si legga nuovamente all'arco, e la differenza che si avrà dalla quantità letta la prima volta sarà l'angolo dei fili.

347. *Della deviazione.* Nota la distanza angolare de' due fili, saremo in grado di stimare l'errore di *deviazione*, allorchè il contatto delle due immagini avviene sopra un raggio visuale non parallelo al piano dello strumento. Si stimerà ad occhio la distanza del punto nel qual è avvenuto il contatto dal più vicino de' due fili del cannocchiale, i quali nelle osservazioni son sempre disposti parallelamente al piano dello strumento; e quindi si conchiuderà di quanto il raggio visuale ha deviato dall'asse ottico del cannocchiale, o sia dal piano dello strumento.

Per evitare intanto di fare un calcolo per così fatta quantità si è formata la Tav. V., ove con l'argomento dell'angolo misurato, e con la deviazione si rinviene prontamente la correzione da fare: essa poggia sul seguente principio.

Sia H (*fig. 56*) l'occhio dell'osservatore, HAB il piano nel quale trovasi l'asse del cannocchiale, parallelo a quello dello strumento. C e D i due punti de' quali misurasi la distanza angolare, che nell'osservazione è rappresentata da AB, e viene indicata in quantità dalla linda sull'arco del lembo. Sia G il polo dell'arco AB, e GCA e GDB due archi di quadrante. Allorchè lo strumento non è perfettamente nel piano HCD, ma trovasi nel piano HAB, vi sarà una deviazione rappresentata da AC, o BD, che è la medesima per tutti e due i punti; perciocchè all'istante del contatto, i raggi che da' punti C e D pervengono al piano dello strumento vi hanno la medesima posizione.

Si tiri l'arco GF perpendicolare a CD, ed avremo diviso in due parti eguali l'angolo in G e gli archi CD ed AB.

Si ponga CD distanza degli astri $= 2d$

AB angolo dato dall'istrumento $= 2D$

AC, o BD, deviazione $= A$

$2D - 2d = 2y$

$d = D - y.$

Nel triangolo sferico rettangolo CGF abbiamo

$1 : \text{sen GC} :: \text{sen G} : \text{sen CF}$, o sia

$1 : \cos \text{AC} :: \text{sen AE} : \text{sen CF}$

$1 : \cos A :: \text{sen D} : \text{sen } d$

Questa proporzione fa conoscere che se cos A non è uguale a zero

sen d sarà sempre minore di sen D; e perciò la distanza vera sempre minore di quella avutasi dall'istrumento. Inoltre abbiamo

$$\text{sen } d = \text{sen }(D - y) = \text{sen } D \cos y - \text{sen } y \cos D$$
$$= \text{sen } D - y \cos D, \text{ e però}$$
$$1 : \cos A :: \text{sen } D : \text{sen } D - y \cos D, \text{ o sia}$$
$$1 : 1 - \cos A :: \text{sen } D : y \cos D$$
$$1 : 2 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2} A :: \tan D : y$$
$$y = \tfrac{1}{2} A^2 \times \tan D$$
$$2y = \text{sen } 1'' A^2 \tan D.$$

Vale a dire: *la correzione sottrattiva da praticarsi alla distanza misurata, è uguale al prodotto del seno di 1'' moltiplicato pel quadrato della deviazione, e per la tangente della metà dell'angolo indicato dallo strumento.* (Vedi l'esempio nell'*Appendice*).

348. *Verifica del verniero.* Passando ora a verificare le parti proprie dello strumento cominceremo ad esaminare se corrispondano con esattezza le parti del verniero, e quelle del lembo. L'una e l'altra saranno debitamente divise allorchè facendo dal verniero percorrere il lembo si avrà esattamente, che corrispondendo la prima divisione del verniero con una divisione qualunque del lembo coincida sempre anche l'ultima del verniero con un'altra del lembo: e se in qualche sito le due estreme lineette del verniero non corrispondano precisamente in pari tempo a due divisioni del lembo, l'uno o l'altro è inesattamente diviso.

349. *Verifica del lembo.* La verifica delle divisioni del lembo relativamente al suo raggio si fa a terra con delle osservazioni a cerchio, la somma delle quali dovrà dare precisamente 360°; ma essendo questa di assai difficile esecuzione si suol ricorrere nella circostanza alla trigonometria. Si piantano due picchetti a terra, e si misura l'angolo fatto all'occhio dalle due rette menate a' medesimi. Se questo angolo è perfettamente lo stesso misurato con tutte le parti del lembo esso sarà con precisione diviso.

Più comodo però di queste osservazioni sarebbe il paragonare lo strumento con altro di conosciuta esattezza. Anzi, allorchè non trattasi di un cerchio, è necessario questo secondo metodo, poichè non potrebbersi

misurare gli angoli in continuazione l'uno dell'altro; ma invece col sestante e con l'ottante, per misurare un angolo qualunque, bisogna partire sempre dallo zero; e quindi l'angolo sarebbe misurato sempre sullo stesso spazio dell'arco.

350. *Dell' errore d' indice*. I sestanti più recenti hanno lo specchio piccolo fisso in quanto al moto di rotazione onde essere situati paralleli al grande; e sono stati i loro autori indotti a ciò stabilire dall' osservare che dopo aver situati gli specchi paralleli, facendo uso dello strumento, questi perdevano per la debolezza del meccanismo la loro situazione, e quindi si procedeva alle astronomiche osservazioni non più partendo dalla posizione degli specchi paralleli, ma, senza che l'osservatore se ne avvedesse, da un'altra situazione. Al contrario facendo lo specchio privo di siffatto meccanismo si può avere un'esattezza maggiore; dal perchè notando qual'è il punto dell'arco graduato al quale corrisponde l'indice della linda allorchè gli specchi sono paralleli, si terrà conto della quantità interposta tra tal punto e lo zero; e questa, aggiunta o sottratta dall'arco misurato, darà con sicurezza l'esito dell'osservazione: tal quantità vien detta *errore dell' indice* o pure *rettifica dello strumento*.

Per trovare l'errore dell' indice si suole mirare all'orizzonte come per situare paralleli gli specchi, e quindi si muove la linda fino che l'orizzonte veduto attraverso la parte trasparente dello specchio sia nello stesso piano della sua immagine veduta sulla parte amalgamata del medesimo specchietto: allora si dirà essere errore dell' indice l'arco tra l' indice e lo zero. Coloro però che sono bene esercitati nelle osservazioni astronomiche sogliono servirsi di un altro mezzo: Misurano due volte l'angolo cui sottende il diametro del sole, una volta portando l'immagine del lembo superiore a contatto del lembo inferiore del sole, e poi viceversa, facendo in ambo i casi partire la linda dallo zero: se i due archi avuti sono uguali, il che quasi mai succede, lo strumento non ha errore d' indice, ma se sono disuguali esiste l'errore.

Sia *om* (*fig.* 57) la misura avuta nell' arco diretto, ed *on* la misura nell' arco di eccesso; se *om* è uguale ad *on* non vi sarà errore, perocchè in ambo le osservazioni si è trovato eguale il diametro del sole come infatti è. Ma se le due misure sono disuguali, come quasi sempre

avviene, è chiaro che l'arco *mn* contiene il doppio della misura del diametro del sole, meno il doppio dell'errore dell'indice, quando l'arco maggiore è nell'arco diretto dello strumento; e nell'altro caso l'arco totale conterrà il doppio del diametro del sole più il doppio dell'errore dell'indice. Cioè, si divida l'arco *mn* in due parti eguali in *r*, sarà

$$mo - or = rn = on + or$$

$$mo - on = 2or$$

$$\frac{mo - on}{2} = or$$

Vale a dire *or*, errore dell'indice, è uguale alla metà della differenza dei due archi osservati *om* e *on*, partendo dallo zero.

Avendo così l'errore dell'indice, se $mo > on$ le osservazioni che si faranno daranno tutte la quantità *or* più del dovere, e quindi la correzione da farsi sarà meno *or*; se poi $mo < on$ allora la correzione sarà più *or*.

Essendo necessariamente il segno dell'errore, contrario a quello della correzione da eseguirsi, per evitare ogni equivoco di disattenzione, indicheremo in seguito col nome *rettifica dello strumento* la correzione da farsi all'angolo misurato, col segno che le appartiene.

351. Da ciò che abbiamo testè detto, è manifesto che l'arco *mn* rappresenterà il doppio dell'angolo sotto cui vediamo il sole nel giorno dell'osservazione, per la qual cosa la metà di *mn* indicherà il diametro, e la quarta parte il semidiametro; noi però ci serviremo in preferenza di quello dato dalla tavola di cui in seguito faremo parola, per la ragione che lo strumento non offre i minuti secondi, come nella tavola sono somministrati dal calcolo.

LEZIONE XXXII.

Della misura delle distanze angolari degli astri, con gli strumenti a riflessione.

352. ***Maneggio del sestante.*** Esposte la descrizione, e le rettificazioni del sestante e del cerchio, passiamo a dire come si osservino con quest'istrumenti le altezze degli astri, o sia le distanze angolari ch'essi hanno con l'orizzonte, e tra loro.

Supponendo di non conoscere affatto l'altezza dell'astro che si vuol misurare si situi la linda a zero, e col cannocchiale si guardi l'astro direttamente; indi facendo muovere la linda si abbassi lo strumento, sempre però in modo che resti nel piano del verticale dell'astro, conservando l'immagine di questo sempre nel campo del cannocchiale, fino a che si vedranno in esso l'astro e l'orizzonte. Ed è da avvertire che trattandosi del sole bisognerà avvalersi dei vetri colorati onde non essere offeso all'occhio dalla vivezza dei suoi raggi. Se però si conosce ad un dipresso l'altezza dell'astro, si potrà situare la linda prossimamente a tal numero di gradi, e situato lo strumento nel piano del verticale dell'astro, e guardando all'orizzonte, si vedranno nel tempo stesso, come sopra, l'astro e l'orizzonte nel campo del cannocchiale. Allorchè il primo sarà poco lontano dal secondo si fermerà la vite di pressione, e mercè la sola vite di richiamo si rettificherà il contatto dell'uno dei lembi con l'orizzonte, e si sarà avuta un'altezza.

Onde esser però sicuri che l'arco misurato appartenga precisamente al verticale, che passa per l'astro si darà certa inclinazione all'istrumento sulla destra, e sulla sinistra; se l'arco che l'astro descrive nel campo del cannocchiale è tangente l'orizzonte, l'altezza sarà bene osservata; altrimenti si aggiusti la posizione dell'istrumento, e con la vite di richiamo si meni al contatto nuovamente e con precisione. Dopo ciò, come è chiaro per quanto si è già dimostrato, l'arco percorso dalla linda, dalla posizione in cui gli specchi erano paralleli fino alla presente, sarà la metà dell'altezza, e quindi esso arco misurato sul lembo, il quale esibisce i mezzi gradi per gradi interi, indicherà direttamente il numero di gradi, minuti primi e secondi di cui costa l'altezza.

Ottenuta questa distanza angolare dell'astro dall'orizzonte vi si applicherà l'errore d'indice; perocchè la numerazione dell'arco parte sempre dallo zero, e questo non sempre corrisponde con precisione ove gli specchi sono paralleli (350), si correggerà ancora se è necessario, dell'errore di parallellismo delle facce del grande specchio, e dell'errore di deviazione, e si sarà ottenuta la quantità indicante l'altezza apparente dell'astro; o pure del lembo dell'astro, quando esso abbia un diametro che offra angolo valutabile alla nostra vista.

353. *Maneggio del cerchio di Troughton.* Questo strumento può adoperarsi come semplice sestante, e come cerchio.

354. *Come sestante.* Si faccia una sola osservazione o serie di osservazioni *a dritta* o sia *all' in su*, o pure si faccia *a sinistra* o sia *all' in giù*: ed in ciascuno de' casi si esegua la rispettiva correzione dell'errore d'indice.

355. *Osservazione a dritta o all' in su.* Posto il verniero della linda A sullo zero del cerchio, e rivolta la graduazione dello strumento a sinistra dell'osservatore o pure all' in su, secondo la posizione de' due oggetti esige, si sciolga la linda A, e si muova al di qua o al di là dello zero, portando l'astro all'orizzonte o l'immagine di un oggetto a contatto prossimo con l'altro.

Si stringa la vite di pressione, e si rettifichi il contatto con la vite di richiamo. Si legga e si noti l'angolo indicato da ciascuno de' vernieri delle tre linde A, B e C, ed il terzo della loro somma sarà l'angolo richiesto.

356. *Osservazione a sinistra o all' in giù.* Si procede in tutto come al caso precedente, eccetto solo che la graduazione dello strumento è rivolta a dritta dell'osservatore o pure all' in giù, secondo esige la posizione de' due oggetti.

357. *Come cerchio.* Ad oggetto di evitare la correzione dell'errore d'indice come ancora per giovarsi delle varie compensazioni di piccioli errori, che il cerchio a preferenza del sestante ne fornisce, si usano le osservazioni incrociate.

Diconsi *osservazioni incrociate* quelle in cui si osservano consecutivamente una o più coppie delle anzidette due specie diverse. Quindi una serie di osservazioni incrociate conterrà sempre un numero pari di angoli osservati.

Per legare una osservazione semplice con l'altra di specie contraria, e quindi formare l'osservazione incrociata, basta solo che dopo aver notato il primo angolo, si spinga il verniero A dall'altra parte dello zero, della stessa quantità presso a poco di che esso lo era nel primo caso.

Indi, rovesciato lo strumento, si porti il cannocchiale al medesimo oggetto; si rettifichi il contatto, e si avrà il secondo angolo, e l'osservazione incrociata sarà terminata: alla quale, operando similmente, si potrà aggiungere una seconda, terza ec: coppia di osservazioni.

358. *Osservazioni incrociate senza rovesciare lo strumento.* Senza l'incomodo di rovesciare lo strumento, si possono ancora avere le osservazioni incrociate, quando però la luce e chiarezza de' due oggetti si presti comodamente a farli distinguere per la parte trasparente e per la parte amalgamata del piccolo specchio: modo che si usa di preferenza a terra, ove gli oggetti sono tutti presso a poco della medesima chiarezza.

Questo metodo consiste nell' osservare sempre allo stesso modo con cui si è cominciato, cioè con osservazioni sempre a dritta o sempre a sinistra; dirigendo però il cannocchiale una volta sul primo oggetto, ed una volta sul secondo; e così sempre alternando, avvertendo in oltre, come sempre nelle osservazioni incrociate, che la totalità degli angoli sia di numero pari, e che siano insieme legate le osservazioni come al numero 357.

359. Il lembo osservato di un astro sarà appunto l' inferiore o il superiore, secondo si è osservato nel cannocchiale, se questo è costruito con la *combinazione terrestre*, cioè in modo da offrire alla vista gli oggetti per dritto, nella posizione medesima in cui veggiamo ad occhio nudo; ma se il cannocchiale sia *semplice* o *astronomico*, per la qual cosa offrirà le immagini capovolte, bisognerà badare che il lembo dell' astro veduto al di sopra sarà l' inferiore; e quello veduto all' in giù sarà il superiore.

360. Se l' immagine riflessa è quella di un astro di assai viva luce, si farà cadere nella parte trasparente del piccolo specchio, ma in ogni altro caso bisognerà riceverla sulla parte amalgamata di esso piccolo specchio per le ragioni esposte nel §. 324.

361. Per conoscere relativamente ad un oriuolo qualunque l' istante in cui si è ottenuto il contatto dell' astro, o di un suo lembo con l'oriz-

zonte, l'osservatore farà contare ad alta voce da un'altra persona i secondi dell'oriuolo; ed in ciò ripeterà egli similmente ad alta voce, quello de' secondi numerati al quale ha corrisposto il contatto; e questa ripetizione sarà nello stesso tempo il segno di esser compiuta l'osservazione.

Se l'istante del contatto non corrisponde perfettamente col secondo numerato, dipenderà dall'espertezza dell'osservatore il valutare le parti decime di minuto secondo, che possono render preciso l'istante dell'osservazione relativamente all'oriuolo.

Nel caso che l'osservatore non ha chi lo secondi, dall'istante nel quale avrà ottenuto il contatto nel campo del cannocchiale, comincerà a contare le battute dell'oriuolo a secondi, finchè giunto con l'occhio sul quadrante di esso, e indi veduta arrivare la lancetta de' secondi sopra un numero intero di secondi nella numerazione del quadrante, lascerà di numerar le battute; e passerà a valutarle in numero di secondi, per sottrarli da quelli numerati sul quadrante; e determinerà in tal guisa l'ora indicata dall'oriuolo all'istante del contatto.

Onde meglio chiarire ciò, supponghiamo che l'osservatore dall'istante in cui ha ottenuto il contatto, fino a che la lancetta de' secondi sull'oriuolo sia giunto al numero 15 del quadrante, abbia contato 17 battute, e che ad ogni cinque battute si sappia precedentemente corrispondere due secondi; allora valuterà di $6'',8$ l'intervallo tra l'osservazione e la lettura dell'ora. E però da $15''$ tolti $6'',8$ resteranno $8'',2$ oltre le ore e minuti primi, che per speditezza si leggeranno dopo. Così, se i $15''$ della lettura facevano parte dell'ora che dovrebbesi indicare, per esempio, $10^h\ 43'\ 15''$, quella dell'osservazione si direbbe $10^h\ 43'\ 8'',2$.

362. Nella circostanza che l'astro osservato fosse la luna bisognerà prendere il contatto col lembo meglio terminato.

363. Nelle osservazioni di notte essendo difficile il distinguere il termine dell'orizzonte, non si potrà mai conseguire una grande esattezza: le circostanze più favorevoli daranno per lo meno tre o quattro minuti primi di errore; quindi sarà meglio aver l'altezza dell'astro dal calcolo, quando il bisogno lo richiede, come in seguito si dirà.

Allorchè fosse possibile, ottener le altezze della luna, di un pianeta o di una stella nell'ora dei crepuscoli matutino o vespertino, fa d' uopo profittare con premura della occasione, mostrandosi allora l'orizzonte, per lo più, netto e ben terminato.

364. Dovendo misurare una distanza della luna da un astro, sarà più spedita cosa, calcolarla dalla *connaissance des temps*, per l'ora prossima del luogo ridotta a quella di Parigi, come in seguito sarà detto; indi situando la linda sul numero de' gradi avuti, e messo lo strumento nel piano che passa pe' due astri e per l'occhio dell'osservatore, si troveranno ambo gli astri nel campo del cannocchiale, ed al modo consueto si otterrà il contatto. Se l'astro dal quale si vuole la distanza lunare è il sole, sarà d'uopo mirare alla luna, ed aver per immagine riflessa quella del sole, ed i lembi del contatto saranno sempre necessariamente i lembi prossimi. Se la distanza della luna vogliasi da un altro astro qualunque, si dovrà mirare a questo, ed aver per immagine riflessa quella della luna: il lembo di questa da menarsi al contatto potrà essere il prossimo o il remoto, dovendo esser sempre quello ben terminato; dappoichè l'astro potrà trovarsi dall'una o dall'altra parte di essa.

365. Le correzioni del parallelismo delle facce del grande specchio, della deviazione, e dell'errore d'indice, non sono le sole da farsi alle distanze angolari osservate; anzi la prima ha difficilmente luogo negli strumenti che oggidì si costruiscono; la seconda non occorre quasi mai quando l'osservatore è bene esercitato; e solamente l'errore d'indice, benchè di piccola quantità, trova luogo quasi in tutti gli strumenti. Vi sono correzioni molto più rilevanti da praticare alle fatte osservazioni, e dipendenti da ragioni tutte estrinseche allo strumento ed alla maggiore o minore abilità dell'osservatore; per cui non passeremo oltre senza prima parlare della *parallasse*, della *rifrazione*, della *depressione* e del *semidiametro*.

LEZIONE XXXIII.

Della parallasse.

366. Dicesi *parallasse* in generale l'angolo fatto da due visuali dirette ad un medesimo punto da due luoghi diversi, senza però che tutti e tre siano sulla medesima linea retta.

Or se due osservatori prendessero nello stesso tempo l'altezza di un medesimo astro; l'uno dal centro della terra, e l'altro dalla sua superficie, è evidente che quello che osserverebbe dalla superficie vedrebbe l'astro più basso, e prenderebbe perciò un'altezza dell'astro minore della vera; mentre quello che sta al centro misurerà la vera altezza; dappoichè sarebbe l'astro rapportato all'orizzonte vero: le altezze osservate dunque dalla superficie della terra sono più piccole delle vere, e sono suscettibili di un errore di *parallasse.*

367. La *parallasse* di un astro è perciò l'errore che si commette osservando l'altezza di esso dalla superficie della terra in luogo di osservarla dal centro: essa varia secondo l'altezza dell'astro, è la massima all'orizzonte, diminuisce nell'elevarsi l'astro su tale cerchio, ed è zero allo zenit. Tal quantità è variabile ancora nella ragione inversa delle distanze, cioè a dire che più un astro è lungi dalla terra, più la sua parallasse diviene minore, dal che ricavasi che la parallasse della luna è la massima per esser questo astro il più vicino a noi; anzi è d'uopo distinguere in essa la parallasse orizzontale da quella di altezza. La parallasse del sole non è che di circa nove secondi al massimo; e quella delle stelle fisse è zero a cagione della loro immensa lontananza da noi.

368. Intanto, essendo l'osservatore, il centro della terra e l'astro sempre nel piano di un verticale, saranno nel medesimo piano l'altezza vera e quella affetta di parallasse; per cui la loro differenza, cioè la parallasse, sarà nel piano dello stesso verticale; e quindi essa non arrecherà cangiamento veruno all'azzimutto dell'astro nè alla sua amplitudine.

In fatti siccome l'altezza presa dal centro della terra, cioè l'angolo ACB (*fig. 58*) per un astro situato in A è l'altezza vera, segue che

l'altezza osservata dalla superficie, cioè l'angolo ATH, è troppo piccola; poichè tirando la TN parallela ad AC, l'angolo BCA sarà uguale allo angolo HTN per i lati paralleli, e perciò maggiore dell'angolo ATH di una quantità ATN uguale a TAC; vi è dunque un errore osservando un astro dalla superficie della terra, e questo errore è uguale all'angolo formato all'astro da una retta che va all'occhio dell'osservatore e da un'altra che va al centro della terra, senza che l'astro apparisca perciò in un verticale diverso.

Per calcolare la parallasse in altezza, ossia l'angolo TAC, immaginiamo il verticale BZ che passi pel centro dell'astro situato in A, e si tiri la CH dal centro della terra al punto in cui questo verticale taglia l'orizzonte; si avrà nel triangolo rettangolo TCH, R : sen H :: CH : CT, e nel triangolo ACT, sen ATC o sen ATZ : sen TAC :: AC o CH : TC; perciò si avrà R : sen H :: sen ATZ o cos ATH : sen A. Dove i tre primi termini sono cogniti, l'angolo H è la parallasse orizzontale, l'angolo ATH è uguale all'altezza apparente: il quarto termine sarà dunque la parallasse di altezza.

369. Abbiamo osservato poc'anzi esser due le cagioni che fan variare la parallasse: l'altezza dell'astro sull'orizzonte, e la distanza dell'astro alla terra, osserviamo ora che seno H ed R sono due termini costanti nell'ultima proporzione, poichè il triangolo CTH è sempre il medesimo, qualunque sia l'altezza dell'astro, ma l'angolo ATH nel secondo triangolo, o il suo complemento ATZ varia a seconda che l'astro ascende o si abbassa sull'orizzonte; è d'uopo dunque che seno A varii nello stesso rapporto affinchè la proporzione sia generale per tutte le altezze.

370. Se l'astro è allo zenit l'angolo ATZ divenendo zero, la parallasse diviene similmente zero; al contrario è evidente che all'orizzonte essa è la massima.

371. Mediante il triangolo DAC si dimostra che le parallassi di due astri situati alla medesima altezza l'uno in A e l'altro in D sono inversamente come le distanze DC ed AC.

372. Inoltre il triangolo TCH in cui si conoscano l'angolo H uguale alla parallasse orizzontale, ed il lato TC uguale al raggio della terra, dà il mezzo di calcolare la distanza della luna al centro della terra, supponendo la luna situata in H sull'orizzonte; poichè si ha in questo triangolo R : sen H :: CH : TC, de' quali, tre termini essendo noti, si può determinare agevolmente il valore della distanza CH.

Quindi, più un astro è distante dalla terra, minore sarà la sua parallasse; e se durante la rivoluzione varia la sua distanza dalla terra, sarà egualmente variabile la sua parallasse. Ed in generale, chiamando p la parallasse, il cui seno può considerarsi confuso con l'arco; r il raggio della terra; e D la distanza dell'astro dal centro di essa, si avrà dalla precedente proporzione, costantemente $p = \frac{r}{D}$.

373. *Parallasse del sole.* Essendosi avuto dalle osservazioni che la parallasse media del sole è di 8",8, mediante le teoriche già esposte si è calcolata la Tav. VI. contenente la parallasse di altezza del sole in diverse epoche dell'anno, considerando la terra come sferica.

374. *Parallasse della luna.* Se l'ipotesi della terra sferica non arreca sensibile errore nel calcolo della parallasse del sole, attesa la gran distanza alla quale trovasi da esso la terra; non è così rispetto a quella della luna, la quale è abbastanza vicina, perchè lo schiacciamento della terra non faccia corrispondere la medesima parallasse in un dato istante a due luoghi situati in diverse latitudini. N'è dunque mestieri, ne' calcoli di molta precisione, procedere ad una piccola correzione sulla parallasse equatoriale, onde ridurla alla latitudine del luogo: a quale oggetto sonosi costruite le Tav. VII. e VIII. delle quali, la prima costruita sulla formola $v = \alpha$ sen 2L dà gli *angoli alla verticale*, per ciascun grado di latitudine; e la seconda sull'altra formola $dp' = \alpha p'$ sen^2 L, indica la diminuzione corrispondente. Vale a dire, prima sottraendo dalla latitudine *astronomica* l'angolo della verticale, bisognerà procurarsi la latitudine *geocentrica* nella Tav. VII.; indi con questa latitudine ridotta ottenere dalla Tav. VIII. la corrispondente diminuzione della parallasse equatoriale, somministrata dalla *Connaissance des temps.*

Sia l'ellisse EPQp (*fig.* 59) un meridiano nella ipotesi della terra sferoidica, AE il raggio dell'equatore, AP il semiasse terrestre, O il luogo dell'osservatore, OA il raggio terrestre menato al punto O, OZ' il suo prolungamento che incontra il meridiano celeste nel punto Z' poco discosto da Z, zenit del luogo, per la ragione che mentre il meridiano terrestre vien considerato ellittico, non cessa il meridiano celeste d'esser circolare.

Sia TO la tangente, ON la normale, AM l'ascissa dal centro, OM l'ordinata.

Se chiamiamo L la latitudine del punto O, come la ottenghiamo dalle osservazioni astronomiche, essa sarà l'altezza del polo celeste P' su di TOT' orizzonte del luogo, saranno gli angoli P'KT', ed OBC = L.

Ogni linea retta che dal centro A sia menato ad un punto qualunque O della superficie sarà il *raggio r* del luogo, il quale varia continuamente di lunghezza da E ov'è il massimo = AE, fino a P ov'è il minimo = AP; e sarà sempre diverso della normale OB, la quale dirigendosi secondo la verticale OZ non può tendere al centro della terra, se non pe' punti E e P.

Per tener conto dello schiacciamento della terra, bisognerà dunque prima ridurre la latitudine astronomica OBC a latitudine geocentrica OAE; indi trovare il valore di AO rispetto di OE, per poi conchiudere la diminuzione di parallasse in un dato istante per L latitudine del punto O, riguardo alla parallasse che nello istante medesimo compete all'osservatore situato in E, cioè all'equatore, siccome la somministra la *Connaissance des temps* di 12 ore in 12 ore: e con ciò si avrà la parallasse *centrale* del luogo.

Si ponga $PA = b$, $EA = 1$, $AM = x$, $OM = y$, l'angolo $OBC = ONM = L$; e rappresenti e l'eccentricità dell'ellisse, di modochè sarà $e^2 = 1 - b^2$; di più $EM = EA - MA = 1 - x$, ed $MQ = 1 + x$.

Abbiamo dalla proprietà dell'ellisse

1.° . . . $y^2 = (1 - x^2)\, b^2$ . . . . . . (A)

2.° . . . $MN = b^2 x$ . . . . (B)

Or nel triangolo rettangolo OMN si ha

$\text{sen } ONM = \frac{OM}{ON}$, $\cos ONM = \frac{MN}{ON}$, e quindi

$$ON = \frac{OM}{\text{sen } ONM} = \frac{MN}{\cos ONM}$$

e sostituendo i simboli algebrici, ed il valore di MN dato nell'equazione (B)

$$ON = \frac{y}{\text{sen } L} = \frac{b^2 x}{\cos L}, \text{ laonde}$$

$$y = b^2 x \frac{\text{sen } L}{\cos L} = b^2 x \tan L \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C)$$

elevando a quadrato sarà

$y^2 = b^4 x^2 \tan^2 L.$

Ma dall'equazione (A) si rileva

$y^2 = (1 - x^2)\, b^2$, dunque

$b^4 x^2 \tan^2 L = (1 - x^2)\, b^2$, o pure

$b^2 x^2 \tan^2 L = 1 - x^2$, e perciò

$x^2 (1 + b^2 \tan^2 L) = 1$, e finalmente

$$x^2 = \frac{1}{1 + b^2 \tan^2 L}.$$

Si sostituisca a b^2 il suo valore $1 - e^2$, si avrà

$$x^2 = \frac{1}{1 + (1 - e^2)\frac{\text{sen}^2 L}{\cos^2 L}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 L + \text{sen}^2 L - e^2 \text{sen}^2 L}{\cos^2 L}}$$

$$x^2 = \frac{\cos^2 L}{1 - e^2 \text{sen}^2 L}, \text{ d'onde}$$

$$x = \frac{\cos L}{(1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

e questo sarà il valore dell'ascissa dal centro in espressione della latitudine.

Inoltre $y = b^2 x \tan L$ per l'equazione (C) è la cosa medesima che $y = \frac{b^2 \text{sen } L}{\cos L} x$, dunque ponendo $1 - e^2$ in luogo di b^2, e sostituendo il valore di x già trovato

$$y = \frac{(1 - e^2) \text{sen } L \cos L}{\cos L\, (1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \text{ o sia}$$

$$y = \frac{(1 - e^2) \text{sen } L}{(1 - e^2 \text{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

ed ecco ancora l'ordinata in espressione della latitudine.

Ciò premesso, nel triangolo rettangolo AOM, sostituendo i simboli si ha $r^2 = y^2 + x^2$, dunque sarà

$$r^2 = \frac{\cos^2 L + (1 - e^2)^2 \operatorname{sen}^2 L}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}$$

Ma il quadrato dell'eccentricità eguaglia la differenza de' quadrati dell'asse massimo e del minimo, e perciò $e^2 = 1 - b^2$; quindi facendo $\alpha =$ alla differenza del raggio dell'equatore sul semiasse de' poli, avremo $b = 1 - \alpha$ ed in conseguenza $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$; o vero, trascurando α^2 come picciolissimo, $e^2 = 2\alpha$. E sostituendo sarà

$$r^2 = \frac{\cos^2 L + (1 - 2\alpha)^2 \operatorname{sen}^2 L}{1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L}$$

$$= \frac{\cos^2 L + \operatorname{sen}^2 L - 4\alpha \operatorname{sen}^2 L + 4\alpha^2 \operatorname{sen}^2 L}{1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L}$$

$$= \frac{1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 L}{1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L}$$

ed estraendo la radice

$$r = \left(\frac{1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 L}{1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r = (1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)^{-\frac{1}{2}}$$

Sviluppando le potenze frazionarie con la formola del binomio, e trascurando i termini contenenti le potenze di α superiori alla prima, sarà

$$r = (1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)(1 + \alpha \operatorname{sen}^2 L)$$
$$= 1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L + \alpha \operatorname{sen}^2 L - 2\alpha^2 \operatorname{sen}^2 L$$

e finalmente

$$r = 1 - \alpha \operatorname{sen}^2 L.$$

La parallasse orizzontale della luna corrispondente al luogo O si ponga $= p$; e siccome la parallasse orizzontale di un astro si ha dalla formola $p = \frac{r}{D}$, dove r dinota il raggio terrestre, e D la distanza dell'astro dal centro della terra; così, allorchè la terra vien considerata sferoidica, il raggio r varia alle diverse latitudini, e perciò variano ancora le corrispondenti parallassi; in guisachè chiamando p' la

parallasse equatoriale si ha $p' = \frac{r'}{D}$; laonde

$$p' : p :: \frac{r'}{D} : \frac{r}{D} :: r' : r$$

$p = \frac{p' \times r}{r'}$, e sostituendo i valori di r ed r'

$p = p' (1 - \alpha \operatorname{sen}^2 L) = p' - p' \alpha \operatorname{sen}^2 L$, quindi

$dp' = p' \alpha \operatorname{sen}^2 L$ . . . . (formola per la Tav. VIII).

Pel triangolo ONA, abbiamo ONM = OAN + NOA = OAN + ZOZ', o pure, ponendo la latitudine geocentrica OAN = L', e ZOZ' = v

$$L = L' + v, \text{ ed } L' = L - v.$$

Inoltre pel triangolo rettangolo OAM si ha

$\cos OAM = \frac{AM}{OA}$, e sostituendo i rispettivi valori

$$\cos L' = \frac{\cos L}{(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)^{\frac{1}{2}}} : (1 - \alpha \operatorname{sen}^2 L), \text{ o sia}$$

$$\cos L' = \cos L (1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)^{-\frac{1}{2}} . (1 - \alpha \operatorname{sen}^2 L)^{-1}$$

sviluppando le potenze ed arrestandoci a' termini in α, sarà

$\cos L' = \cos L (1 + \alpha \operatorname{sen}^2 L) (1 + \alpha \operatorname{sen}^2 L)$, cioè

$\cos L' = \cos L (1 + 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)$.

Ma noi abbiamo $L' = L - v$, e perciò

$\cos L' = \cos L \cos v + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} v$

$= \cos L + v \operatorname{sen} L$; quindi

$\cos L + v \operatorname{sen} L = \cos L (1 + 2\alpha \operatorname{sen}^2 L)$

$= \cos L + 2\alpha \operatorname{sen}^2 L \cos L$, e sarà

$v = 2\alpha \operatorname{sen} L \cos L$, o sia

$v = \alpha \operatorname{sen} 2L$. . . . . (formola per la Tav. VII).

La correzione relativa a questa Tav. VII. è di così piccolo momento che quasi sempre si trascura, come può ben rilevarsi dalla sola ispezione de' valori offerti dalle due anzidette formole nelle due tavole VII ed VIII, e sarà evidente poterne contentare della sola correzione relativa alla Tav. VIII. nella maggior parte de' casi. Non v'è circostanza nella quale la prima giunga a 20''.

375. *Parallasse de' pianeti.* La parallasse orizzontale de' pianeti, giungendo al massimo a 34″, sarà facile, senz'altra correzione, ottenerla dalla Tav. IX., ove trovansi regolarmente calcolate, secondo i diversi gradi di altezza.

LEZIONE XXXIV.

Della rifrazione della luce.

376. *Leggi della rifrazione della luce.* Dicesi *rifrazione della luce* quel piegare o mutar direzione che fa ogni raggio di luce allorchè passa da uno in altro mezzo di diversa densità. E l'esperienza ha somministrato le seguenti leggi di diottrica.

1.° Ogni raggio di luce procede in linea retta in un mezzo uniforme; come ogni corpo il cui movimento non è turbato da causa estranea.

2.°. Allorchè un raggio di luce passa obliquamente da un mezzo in un altro cangia direzione; e questa si accosta alla perpendicolare se passa in mezzo più denso, e se ne scosta se passa in mezzo più raro.

3.° Quanto più denso è il mezzo in cui passa il raggio di luce, più grande è la rifrazione.

4.° Il raggio incidente, la perpendicolare che dicesi ancora *asse di rifrazione*, ed il raggio refratto sono sempre nello stesso piano.

5.° Finalmente il seno dell'angolo fatto dal raggio d'incidenza con l'asse della refrazione sta al seno dell'angolo refratto sempre nello stesso rapporto, quando si tratta di un medesimo mezzo, qualunque possa essere l'angolo d'incidenza. Dalla quale proprietà si deduce che se è perpendicolare il raggio di luce non vi sarà rifrazione, essendo in tal caso il seno dell'angolo fatto dal raggio d'incidenza con l'asse della rifrazione, uguale a zero.

E l'esperienza stessa ha somministrato che questo rapporto è, passando obliquamente un raggio di luce dall'aria

nell'acqua di 4 : 3
nel cristallo di 3 : 2 o meglio 31 : 20
nel diamante di 5 : 2

377. *Dell' atmosfera.* Or poichè la terra trovasi circondata dall'*atmosfera*, cioè da quell'aggregato di fluidi aeriformi che la coprono da per tutto; così quest'atmosfera dovrà agire sopra ogni raggio di luce che da un corpo celeste ne giunge, come agiscono su di esso i corpi diafani. Quindi se da un astro S (*fig. 60*) giunge obliquamente il raggio SA alla superficie esteriore dell'atmosfera, dovrà subire una rifrazione ed accostarsi ad AO asse di rifrazione; e siccome l'aria non è della medesima densità a distanze diverse dal centro della terra, ma cresce sempre in densità a misura che la distanza diminuisce; in guisachè possiamo supporre divisa l'atmosfera in tanti strati sferici di diversa densità, così incontrando il raggio refratto AB un secondo strato di maggior densità tornerà nuovamente a rifrangersi in B, accostandosi alla perpendicolare BO: e così di seguito finchè giungerà all'occhio dell'osservatore in E percorrendo la curva ABCDE; e quindi l'astro S verrà riferito al punto S' nella direzione ES' tangente tal curva nel punto ove il raggio di luce, dopo tutte le sue successive rifrazioni, incontra l'occhio dell'osservatore; e ne parrà in conseguenza sempre più alto di quello che è realmente.

378. *Della quantità della rifrazione.* Se si prende ad osservare una stella di continua apparizione, e che passi intanto per lo zenit del luogo di osservazione; allorchè essa si troverà allo zenit la sua luce non avrà rifrazione (370.5.°) e sarà veduta nella vera direzione che le corrisponde nella sfera celeste. Si misuri in tal caso la sua distanza dal polo elevato mercè due linee di mira, dirette una alla stella, e l'altra nella direzione del polo.

Se non vi fosse rifrazione, giunta la stella al semimeridiano inferiore dovrebbe trovarsi egualmente distante dal polo; ma poichè in questo caso giunge la sua luce obliquamente e si rifrange nell'atmosfera, essa ne sembra più elevata di quanto lo è in effetto, e l'angolo fatto dalle due linee di mira sarà minore; per cui è uopo conchiudere che la differenza tra il primo ed il secondo di tali angoli, rappresenta la quantità in maggiore altezza, dovuta alla rifrazione.

Ripetendo questa osservazione in luoghi diversi si è pervenuto a stabilire la legge con la quale la rifrazione aumenta dallo zenit ov'è nulla

fino all'orizzonte, ov'è la massima; ed essa ha fatto conoscere che al sorgere e al tramontare il sole ha di rifrazione 33′ o sia 1980″; ma il diametro apparente è di 1923″, in conseguenza quando vediamo il lembo inferiore del sole staccarsi dall'orizzonte al suo sorgere, mancano ancora 57″ per cominciare effettivamente a sorgere sull'orizzonte il lembo superiore, facendo astrazione da ogni altra circostanza; e viceversa diremo pel suo tramonto.

379. *De' crepuscoli.* Da questo stesso fenomeno della rifrazione combinato con l'altro della riflessione, dipende quello de' crepuscoli matutino e vespertino.

Sia il sole (*fig. 61*) al di sotto dell'orizzonte del punto A; un suo raggio di luce SB dopo avere incontrato l'ultimo strato dell'atmosfera in B, capace di riflettere la luce, facendo un angolo SBP con l'asse della rifrazione BP; una parte traverserà al di là di B, ma un'altra parte si rifletterà (321), e quindi farà un angolo PBA di riflessione eguale all'angolo d'incidenza SBP.

Se dunque la posizione di B è tale che AB sia tangente la terra nel punto A, in questo punto si avrà il crepuscolo; ma per essere AB tangente bisogna che ancora SB lo sia, adunque il crepuscolo in A, non potrà avvenire che in questa posizione; mentre se il sole trovisi in S′ tanto al di sotto dell'orizzonte, che S′B′ sia la tangente la terra in C′ in vece di C, avverrà il crepuscolo per *a*, e sarà tuttavia notte per A, finchè il sole non giunga in S, dove si verifica che BA è tangente in A.

380. *Parallelo de' crepuscoli.* Era d'uopo adunque determinare a qual parallelo di depressione deve il sole corrispondere per avere luogo il cominciamento dell'alba.

Solo nella posizione di sfera retta, e nel giorno dell'equinozio si ha che il sole sembrando per la rotazione della terra descrivere l'equatore, e quello trovandosi confuso col primo verticale, e perpendicolare all'orizzonte, saranno le differenze in altezza del sole identicamente le differenze in ascensione retta; e però misurata in tal caso in tempo l'intera durata del crepuscolo, e questa, ridotta in gradi, ne farà conoscere a qual parallelo di depressione trovasi il sole al cominciar del fenomeno.

Tale intervallo si è trovato essere di $1^h\ 12'$; quindi si è stabilita la proporzione $24 : 1,2 :: 360 : x = 18°$, e si è venuto a conchiudere che il crepuscolo comincia allorchè il sole trovasi 18° al di sotto dell' orizzonte.

381. *Altezza dell' atmosfera.* Ma in tal caso il primo raggio del sole è tangente in C, e dura il crepuscolo fino a che diviene tangente in A, o sia dura per tutto il tempo che il punto del contatto descrive l'arco AC, laonde AC sarà di 18°, e però ABC $=$ 162°, ed APB $=$ 9°. Or noi abbiamo PB $=$ PA sec APB $=$ sec 9° $\times$ 4305 miglia (34), $=$ 4358 miglia, e però DB $=$ PB $-$ AP $=$ 4358 $-$ 4305 $=$ 53 miglia.
Vale a dire, l' ultimo strato dell' atmosfera, o almeno quello di corpo sufficiente a far rimbalzare la luce, è 53 miglia distante dalla superficie terrestre.

382. Sicchè riassumendo diremo, che la rifrazione fa apparire gli astri sempre più elevati del vero; senza però farli uscire dal piano verticale in cui trovansi; che combinata con la riflessione produce il crepuscolo; e finalmente che ne ha guidati alla conoscenza dell' altezza dell' atmosfera sulla terra.

383. *Uso del barometro e del termometro.* Da quanto si è detto finora è manifesto che la più grande rifrazione avverrà allorchè gli astri sono all' orizzonte, e andrà diminuendo a misura che l' altezza aumenta; e giunto l' astro allo zenit la rifrazione sarà nulla.

384. Ora ne fa d' uopo aggiungere che la rifrazione non è sempre la stessa per le medesime altezze, e che essa varia secondo la maggiore o minor densità dell' atmosfera: Ed in generale più l' atmosfera è densa più aumentano le rifrazioni astronomiche, e sono tanto più piccole quanto più la densità dell' atmosfera diminuisce. E siccome il freddo condensa l' aria, ed il caldo la rarefà, così dobbiamo conchiudere che la rifrazione atmosferica aumenta col freddo e diminuisce col caldo; e da ciò siegue che le variazioni dell' altezza del mercurio nel termometro possono servire a calcolare i cambiamenti cui vanno soggette le rifrazioni.

385. Oltre a ciò abbiamo che la densità nell'atmosfera cresce ancora in ragione del suo peso; quindi la maggiore o minore elevazione della colonna di mercurio nel barometro, la quale indica la maggior o minor densità dell'atmosfera, dovrà ancora esserci di guida nell'estimazione della rifrazione. Cioè le rifrazioni saranno tanto maggiori per quanto più elevato sarà il mercurio del barometro.

386. Le quantità da calcolarsi per ogni grado del barometro, e del termometro sono ricavate da tavole pubblicate dal burò di longitudine di Francia; e trovansi disposte in modo, che quando non richiedesi una grande esattezza, basterà col solo argomento dell'altezza trovare la correzione dovuta alla rifrazione corrispondente ad una temperatura assunta come media, per esempio di $0^m,760$ del barometro, e $+ 10^\circ$ del termometro centigrado, siccome sono nella Tav. X. Ma quando però si voglia la correzione per la rifrazione con più esattezza come richiedesi nel calcolo della longitudine per mezzo delle distanze lunari, allora il burò di longitudine ha più estesamente provveduto al bisogno; ed egualmente saranno ritrovate nelle Tav. XI. e XII. per le diverse altezze, le correzioni che corrispondono alle indicazioni del barometro e del termometro, che si avrà cura di notare nel momento dell'osservazione; e perchè finalmente sia più agevole servirsi in mare di queste tavole, riportiamo nella Tav. XIII. la corrispondente valutazione dell'altezza del mercurio nel barometro in millimetri secondo il nuovo costume, e la corrispondente traduzione de' gradi di Réaumur in gradi del termometro centigrado.

387. Nella Tav. X. la prima colonna contiene l'altezza apparente; la seconda, la rifrazione di un astro in generale, e serve perciò per le altezze delle stelle fisse; la terza esprime il residuo della rifrazione media sulla parallasse del sole, e serve esclusivamente per tale astro. Questa terza colonna riduce ad una sola le due correzioni della rifrazione e della parallasse che far si debbono all'altezza del sole; imperciocchè la rifrazione facendo apparire l'astro più alto del vero sarà sempre una correzione sottrattiva; ed al contrario la parallasse come già si è detto, facendo osservare maggiore altezza di quella che ha

l'astro, sarà sempre una quantità additiva; e poichè la rifrazione pel sole è sempre maggiore della parallasse, il residuo della rifrazione meno parallasse sarà sempre una correzione sottrattiva, che verrà dalla tavola direttamente somministrata.

388. Per la luna la Tav. XIV. dà la quantità da aggiungere all'altezza apparente del centro della luna, per ottenere l'altezza vera; poichè tal quantità è la differenza tra la parallasse di altezza, e la rifrazione media della Tav. X.; ed essendo per la luna la parallasse sempre maggiore della rifrazione, così questa correzione somministrata dalla Tav. XIV. sarà sempre additiva. Ed a questo proposito è d'uopo avvertire, che in tutti i casi ne' quali vogliasi tener conto delle correzioni relative allo stato del barometro e del termometro, sarà indispensabile nel servirsi delle Tav. XI. e XII., adoperarle col segno contrario a quello che ivi hanno, e ciò per la medesima ragione poco anzi esposta.

LEZIONE XXXV.

Della Depressione.

389. Allorchè l'altezza di un astro è osservata in mare, se l'osservatore potesse situarsi con l'occhio nel piano dell'orizzonte sensibile, misurerebbe con esattezza quella porzione di verticale compresa tra l'astro e l'orizzonte, cioè a dire l'altezza apparente di esso; ma è evidente che a misura che l'occhio dell'osservatore si eleva al di sopra dell'orizzonte, tal piano deve abbassarsi sotto dell'astro, e questo comparirà più elevato di quello che effettivamente è, donde segue che quando si osserva l'altezza di un astro in mare, essendo l'occhio elevato sul bastimento, l'altezza sarà sempre eccedente: l'errore che si commette in questa circostanza chiamasi *inclinazione dell'orizzonte* o *depressione*.

390. Se un osservatore elevato al disopra del livello del mare ha l'occhio situato in O (*fig. 62*), il suo orizzonte invece d'esser veduto secondo l'orizzontale OH, sembrerà al disotto ed inclinato secondo la linea OD; poichè a misura che l'occhio si eleva al disopra del punto B sulla

terra, l'orizzonte inclina al disotto del punto A nel cielo, per modo che se si osserva l'altezza di un astro situato in A, questo avrà per altezza l'angolo AOD invece dell'angolo AOH; e si commette in questa osservazione un errore disegnato dall'angolo DOH, che chiamasi inclinazione dell'orizzonte o depressione.

391. L'inclinazione dell'orizzonte o depressione è dunque un angolo formato all'occhio dell'osservatore da una linea orizzontale e da una linea tangente la terra, il quale dovrà esser sempre sottratto dall'altezza osservata.

Quest'angolo di depressione si trova calcolato per le differenti elevazioni dell'occhio alle quali può trovarsi al disopra del livello del mare, da un piede sino a trecento, nella Tav. XV.

392. Per costruire questa tavola, si osservi che nel triangolo rettangolo OCN si conoscono il lato OC che è uguale al raggio della terra, più l'elevazione dell'occhio, e 'l lato CN che è uguale al raggio della terra. Laonde togliendo dal quadrato di OC il quadrato di CN si avrà il quadrato di ON, ed estraendo la radice quadrata si conoscerà benanco il lato ON; e poichè nel medesimo triangolo si ha CO : ON :: R : sen OCN, così trovato C sarà determinato l'angolo di depressione HON.

O pure si ponga $OB = e$, elevazione dell'occhio, o meglio, del grande specchio dello strumento; $HON = d$; $R = CB = CN$ raggio della terra supposta sferica: la proporzione CO : ON :: R : sen OCN si cangerà nell'altra

$$1 : \cos d :: R + e : R, \text{ o vero}$$
$$1 - \cos d : \cos d :: e : R, \text{ o sia}$$
$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} d : \cos d :: e : R$$

e moltiplicando il primo rapporto per tan d

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} d \tan d : \operatorname{sen} d :: e : R;$$

ma $\operatorname{sen} d = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} d$ (274,34), dunque

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} d \tan d : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} d :: e : R$$

e dividendo per $\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} d$ il primo rapporto

$$\tan \tfrac{1}{2} d \tan d : 1 :: e : R$$

in oltre per la picciolezza di d abbiamo tan $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}$ tan d; quindi

$$\frac{1}{2}\tan^2 d : 1 :: e : R$$

$$\tan^2 d : 2 :: e : R$$

$$\tan d = \sqrt{\frac{2e}{R}}.$$

393. *Della rifrazione terrestre.* Se la rifrazione fosse a tutte le altezze la medesima, questa sarebbe direttamente la correzione da farsi per la depressione; ma poichè l'esperienza insegna esser nello stato normale dell'atmosfera gli strati inferiori sempre più densi, seguendo nelle piccole altezze una progressione aritmetica proporzionale alle differenze in altezza; siegue che il raggio di luce che traversa obliquamente l'atmosfera dal lembo dell'orizzonte all'occhio, descrive una curva, la quale secondo le leggi di diottrica resta nel piano del verticale (376). E perciò l'occhio situato in O vedrà il limite dell'orizzonte secondo la Om tangente la curva NxO, nel punto O del suo incontro all'occhio; ed il lembo dell'orizzonte verrà per tal modo riferito al punto m in vece di N, fenomeno che distinguesi col nome di *rifrazione terrestre*.

Adunque la depressione già determinata d dev'essere diminuita della rifrazione NOm, per aver la vera quantità HO$m = d'$ da sottrarre dall'altezza osservata; e quindi n'è mestieri dedurre da d il valore di d'.

Comechè della curva NxO impossibile sia determinare la specie, pure per la sua picciolezza possiamo considerarla come arco di cerchio. E allora l'angolo di rifrazione mON sarà misurato dalla metà dell'arco ON; e similmente se dividesi quest'arco in due parti eguali in x, l'angolo xOm che sarà la rifrazione corrispondente al punto v veduto da O, sarà misurato dalla metà dell'arco Ox; donde siegue che la rifrazione terrestre in O, pe' punti N e v è proporzionale agli archi ON ed Ox. E gli archi BN e Bv appartenenti ad un cerchio massimo della terra, si possono senza errore sensibile considerare di esser nel rapporto medesimo. Quindi in generale diremo esser la rifrazione terrestre proporzionale agli angoli delle verticali mC, xC, ec. de' luoghi mirati N, v ec., con OC verticale dell'osservatore.

Rappresentiamo ora con n un fattore costante, somministrato dalla esperienza, pel quale moltiplicato Bv, metà dell'arco di distanza del

punto mirato N, dia un prodotto eguale ad NOm correzione da farsi alla depressione, cioè $NOm = Ox = n \times$ arco Bv.

Ora essendo $HON = HOm + mON$, sarà $d = d' + nd = \frac{d'}{1-n}$. Ma noi abbiamo avuto $\tan d = \sqrt{\frac{2e}{r}}$, dunque

$$\frac{\tan d'}{1-n} = \sqrt{\frac{2e}{R}}$$

$$\tan d' = (1-n)\sqrt{2}\sqrt{\frac{e}{R}};$$

in oltre d' per la sua picciolezza può considerarsi confuso con la tangente, ed esser direttamente espresso in minuti secondi; $\sqrt{2} = \frac{1}{\text{sen}\, 45°}(274.8)$; e finalmente per ridurre l'espressione $\sqrt{\frac{e}{R}}$ all'assunta unità di tan 1'' bisognerà dividerla per la tan 1'', o sia moltiplicarla per cot 1'', sarà

$$d' = \frac{1-n}{\text{sen}\, 45°} \cot 1'' \sqrt{\frac{e}{R}}.$$

394. Su questi principî poggia la Tav. XV., ponendo il valore medio di $n = 0{,}07876$, giusta gli esperimenti fatti in Francia (Vedi l'esempio nell'*Appendice*). Essendo però impossibile valutar con esattezza gli effetti della rifrazione atmosferica in ciascuna osservazione, potremo contare sull'approssimazione di circa 20'' in più o in meno, allorchè ci serviremo di questa tavola.

395. Le depressioni a questo modo calcolate, suppongono in sostanza pel valore di n, che la rifrazione terrestre le diminuisca sempre di circa 0,08 rispettivamente; ma essendo molto grandi, anomale ed istantanee le variazioni che l'aria soffre nelle vicinanze della superficie della terra, la curva che dal lembo dell'orizzonte giugne all'occhio prende tante diverse inflessioni, che qualche volta presenta la parte concava verso il cielo. Per cui sarà sempre cosa prudente evitare le grandi rifrazioni: cioè non misurar mai le altezze degli astri allorchè trovansi prossimi all'orizzonte; e non accordar molta fiducia alle osservazioni, se la

parte dell'orizzonte posta a contatto dell'immagine dell'astro, non sia abbastanza sgombra di vapori, da poterne scernere l'estremo lembo con sufficiente nettezza.

396. *Dell'orizzonte artificiale.* Ad evitare tutte queste incertezze nei calcoli delle diverse verifiche che debbonsi fare nelle diverse stazioni, si adopera l'*orizzonte artificiale*; tanto più che difficilmente gli strumenti a riflessione potrebbero servire a terra a misurare le altezze degli astri, senza il suo sussidio.

Generalmente si dà questo nome ad uno specchio ben levigato e piano, e di figura rotonda, di circa 9 pollici di diametro, con la superficie inferiore scabrosa e dipinta a nero, onde evitare gli errori che possono derivare dal non parallelismo delle facce (320).

Suole incastrarsi in una cassettina di rame sorretta da tre viti, mercè le quali e con la guida di un livello a bolla d'aria vien situato orizzontalmente allorchè si procede all'osservazione.

Sia HN (*fig. 63*) l'orizzonte artificiale posto parallelo all'orizzonte del luogo; S un astro, ed O l'occhio dell'osservatore situato in guisa che il piano dello strumento sia nel piano del verticale che passa per l'astro. L'angolo SS'N dinoterà l'altezza dell'astro da doversi determinare.

L'occhio situato in uno de' punti del raggio riflesso S'O vedrà l'immagine del sole in S'', ed essendo per la proprietà degli specchi piani l'angolo $S''S'N = SS'N$, sarà tutto l'angolo $SS'S'' = 2\ SS'N$. Ma l'angolo $SS'S'' = S'OS + OSS'$, e quest'ultimo angolo OSS' per l'immensa distanza alla quale trovansi gli astri da noi dev'essere considerato come nullo; adunque prendendo $SS'S'' = S'OS$, avremo che sarà ancora $S'OS = 2SS'N$. Quindi chiamando *immagine diretta* di un astro quella che si ha dallo specchio grande dell'istrumento, ed *immagine riflessa* quella veduta in fondo allo specchio; diremo che portando a contatto l'immagine diretta con l'immagine riflessa avremo determinato l'angolo $SOS'' = SS'S'' = 2SS'N$; cioè l'angolo doppio dell'altezza vera. Per la qual cosa, presa la metà del misurato angolo SOS'', si sarà ottenuta l'altezza dell'astro.

397. Bisogna intanto avvertire, che ottenendosi l'immagine in uno specchio situato orizzontalmente, a rovescio nel senso verticale di come effettivamente l'oggetto è situato, per le ragioni di già esposte nella teorica degli specchi piani (321), sarà necessario di tener conto de' semidiametri dell'una e dell'altra immagine, secondo il diverso modo nel quale si è menato il contatto, semprechè si tratti di astri di cui è d'uopo tener conto del semidiametro: sia che il cannocchiale dello strumento dia l'immagine diretta, o rovesciata.

398. In ambo i casi però potrà evitarsi di tener conto del semidiametro con menare a contatto le due immagini una volta co' lembi prossimi, ed una volta co' lembi rimoti, allora la quarta parte della somma de' due angoli osservati darà l'altezza apparente del centro, che rimarrà solamente a dover esser corretta di rifrazione e parallasse; mentre la quarta parte della differenza ne indicherà la quantità rappresentata dal semidiametro. Sarà sempre necessario però di badare a non confondere le due immagini, e perciò sarà utile adoperare quel vetro colorato dello strumento che colorisca l'immagine del sole diversamente da quella che si ha nell'orizzonte artificiale; o pure descrivere con lo strumento un piccolo arco per distinguere l'immagine diretta dalla riflessa.

399. Volendo assicurarci in fine che lo specchio che serve di orizzonte artificiale sia perfettamente piano ci serviremo dell'altezza meridiana di uno de' lembi del sole, facendo percorrere al punto di contatto delle due immagini, tutta la superficie dell'orizzonte artificiale: se il contatto si altera, lo specchio non è perfettamente piano.

400. Ad evitare però gl'inconvenienti che lo specchio presenta nello usarlo come orizzonte artificiale, sarà più agevole servirsi dell'*orizzonte artificiale a mercurio*.

Questo consiste in una discreta quantità di mercurio conservata in una specie di anforetta di legno, il quale al bisogno si versa in una cassettina rettangolare egualmente di legno incavato, il cui lato maggiore è di circa 8 pollici, e di 4 il minore: il liquido prenderà subito la sua situazione orizzontale da se medesimo senza bisogno di alcuna

pena, nè di veruna perdita di tempo. Il solo inconveniente che in ciò si osserva si è il veder ad ogni piccola brezza tremolare il liquido, ad onta di essersi prescelto il più pesante di tutti, qual'è il mercurio; ma si ovvia a ciò sovrapponendo all'orizzonte artificiale un prisma di cristalli che lo ripari dal vento.

In caso di bisogno può ancora farsi uso di un liquido qualunque, annerendolo con quella quantità di nerofumo che si stimerà opportuna; ma il meglio sarà il servirsi di catrame versata in una tina, come quello ch'essendo più resinoso cede meno al vento.

LEZIONE XXXVI.

Del Semidiametro.

401. Non potendosi ravvisare il centro di un astro si è obbligato di osservare il suo lembo inferiore o il superiore: le altezze prese del lembo inferiore sono evidentemente troppo piccole, mentre quelle prese del lembo superiore sono troppo grandi: l'errore che commettesi osservando uno de' lembi chiamasi errore del *semidiametro.*

402. Il semidiametro di un astro è dunque l'angolo formato all'occhio dell'osservatore da due raggi, l'uno che va al centro, e l'altro al lembo dell'astro.

403. Noi abbiamo veduto, parlando de' movimenti della terra e della luna, che la terra si avvicina al sole andando dall'afelio al perielio, e se ne allontana nel passare da questo a quello (46); ed analogamente per la luna riguardo all'apogeo e al perigeo; è d'uopo inoltre qui notare che più un astro è prossimo all'osservatore più il suo semidiametro aumenta, e viceversa.

404. Il semidiametro del sole trovasi calcolato nella *Connaissance des temps* di sei in sei giorni, e quello della luna per ogni 12 ore.

405. Il semidiametro orizzontale della luna si assume come quello che si vedrebbe dal centro della terra (411), ma allorchè la luna è al di

sopra dell'orizzonte è evidente che l'osservatore le è più vicino di qual che lo sarebbe se stesse al centro della terra, onde essendo minore la distanza dall'astro alla superficie, il semidiametro dovrà aumentare; e sempre nella ragione inversa delle distanze.

Sia AC (*fig. 64*) il semidiametro di un astro veduto dai punti B e D sotto gli angoli ABC e ADC. Si avrà nel triangolo DBC, CD : CB :: sen CBD o sen CBA : sen CDB, ovvero, a cagione della picciolezza degli angoli, CD : CB :: CBA : BDC, ove osservasi che i due angoli B e D cioè i semidiametri veduti dai punti B e D sono inversamente come le distanze CB e CD.

406. Siegue da ciò che il semidiametro delle stelle fisse è nullo a cagione della loro immensa distanza dalla terra.

407. *Del semidiametro in altezza.* Conoscendo il semidiametro orizzontale di un astro, sarà facile determinare quello apparente relativo ad una data altezza, mediante la proporzione *coseno altezza vera : coseno altezza apparente* :: *semidiametro centrale* : *semidiametro apparente.*

Nel triangolo TAL' (*fig. 65*) si ha sen L'TA : sen L'AT :: AL' : TL', o sia cos L'TH : cos L'AO :: AL' : TL'; ma AL' : TL' o sia TL :: d : δ (405), chiamando d il semidiametro orizzontale o centrale, e δ quello in altezza; adunque facendo h eguale all'altezza vera L'TH, ed h' uguale all'apparente L'AO, si ha cos h : cos h' :: d : δ.

408. *Semidiametro apparente del sole.* Per mezzo di tal proporzione sarà dunque facile, conoscendo il diametro orizzontale di un astro, dedurre il suo diametro apparente in altezza. Essendo costantemente D : Δ :: δ : d. Quando l'astro sia il sole, la cui parallasse è piccola (373) ed in conseguenza il raggio terrestre pressochè di niun valore rispetto alla distanza del sole, risulterà $D = \Delta$, e sarà $d = \delta$. Si potrà dunque trascurare questa correzione, e prendere il semidiametro del sole come vien indicato dalla Tav. XVI., in dove è dato per tutti i giorni 1, 7, 13, 19, 25 di ciascun mese; senz'aver riguardo alla correzione dovuta a' diversi gradi di altezza.

409. *Semidiametro della luna.* Allorchè l'astro osservato sia la luna, non possiamo più considerare $\Delta = D$, poichè saranno abbastanza differenti i loro valori, e costantemente $D > \Delta$ (407), quindi sarà pure $\delta > d$ o sia il semidiametro di altezza sarà sempre maggiore dell' orizzontale; dovremo adunque occuparci della formazione di due tavole una per ottenere d, e l'altra per aver la correzione di aumento onde da d dedurre δ.

410. *Semidiametro orizzontale della luna.* Essendo $p : p' :: D' : D$ (371) e $D' : D :: d : d'$ (405), sarà $p : p' :: d : d'$, o sia $\frac{d}{p} = \frac{d'}{p'}$. Vale a dire la parallasse orizzontale ha un rapporto costante col diametro orizzontale, sia che l'osservatore trovisi all' equatore, o in latitudine qualunque. Laonde dopo aver ridotta la parallasse equatoriale a parallasse del luogo dell' osservatore (374), potremo direttamente avere il semidiametro orizzontale che le corrisponde. Or si supponga essere il semidiametro orizzontale della luna alla parallasse equatoriale, come $16' 21''$ a $60'$, avremo $\log \frac{d}{p} = 9{,}4353665$; e ponendo $\frac{d}{p} = a$, sarà $d = ap$; e però $\log d = 9{,}4353665 + \log p$. A questo modo si è avuto il valore di d per tutti i possibili valori della parallasse p, da $53' 30''$ sino a $61' 40''$, calcolati di 10 in $10''$, e sonosi disposti nella Tav. XVII, nella quale a piè di pagina sono ancora indicate le parti proporzionali per le unità di secondi.

411. *Aumento del semidiametro della luna in altezza.* Nel triangolo LAT (*fig. 65*) si ha $LA = LT \cos ALT = D \cos p$. Ma $D = 86000$ leghe (64) le quali espresse in raggi terrestri riducono $D = 59{,}93$; ed in oltre facendo $p = 61'30''$ ch' è la circostanza più svantaggiosa riguardo all' eguaglianza di LT con LA, si avrà $LA = 59{,}93 \times \cos 1° 1' 30''$ $= 59{,}924$; donde è chiaro che quando ancora la parallasse sia la massima, LA è minore di LT per meno di un centesimo del raggio della terra, e possiamo perciò considerarle com' eguali.

Or essendo $\frac{D}{\Delta} = \frac{\delta}{d}$, chiamando D la distanza orizzontale, Δ la di-

stanza dall'occhio dell'osservatore alla luna, allorchè questa è in altezza, δ il diametro in altezza, d il diametro orizzontale (405) e π la parallasse in altezza; ed essendo ancora $p : \pi :: 1 : \cos h$, o sia $\pi = p \cos h$; la proporzione LT : L'A :: sen L'AT : sen L'TA :: cos L'AL : cos L'TH, si convertirà nell'altra $\delta : d :: \cos h : \cos (h + p \cos h)$;

e quindi si avrà ancora $\frac{\delta}{d} = \frac{\cos h}{\cos (h + p \cos h)}$, o sia

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\cos h}{\cos h \cos (p \cos h) - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} (p \cos h)};$$

ma senza tema di errare possiamo considerare $\cos (p \cos h) = 1$, e l'altra espressione $\operatorname{sen} (p \cos h) = p \cos h$, dunque riducendo

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\cos h}{\cos h - \operatorname{sen} h\, p \cos h} = \frac{1}{1 - p \operatorname{sen} h}$$

e sottraendo l'unità da ambo i membri

$$\frac{\delta - d}{d} = \frac{p \operatorname{sen} h}{1 - p \operatorname{sen} h}$$

nella quale equazione il secondo membro, trascurando le potenze superiori alla prima, riducesi a $p \operatorname{sen} h$; adunque sarà

$\delta - d = d\, p \operatorname{sen} h$.

Ma il rapporto della parallasse orizzontale al semidiametro è quello di 60' a 16',21'' o sia di 400 : 109, il cui logaritmo è 0,5646335, e tal rapporto chiameremo $a' = \frac{p}{d}$, donde si ha $p = a' d$, e finalmente ponghiamo $\delta - d = \alpha$, aumento dovuto al semidiametro orizzontale per ottenere il semidiametro relativo all'altezza h: facendo queste sostituzioni si ha

$$\alpha = a' d^2 \operatorname{sen} h$$

nella quale sarà d'uopo moltiplicare d^2 per sen 1'' onde averne l'espressione in parti del raggio, dunque la formola da calcolar la Tav. XVIII., sarà

$$\alpha = a' d^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} h.$$

412. *Diminuzione del semidiametro verticale.* Variando continuamente le rifrazioni dall'orizzonte allo zenit, i lembi superiori ed inferiori del sole e della luna trovandosi a circa 32' di differenza in altezza, ne sarà la vista da diversa rifrazione affetta, cioè pel lembo inferiore vi

sarà sempre rifrazione maggiore che pel lembo superiore, e questa differenza sarà tanto più significante quanto più all'orizzonte trovansi i detti astri vicini. Or questa maggior rifrazione del lembo inferiore, facendolo comparire più alto di una quantità maggiore di quella di cui s'innalza il lembo superiore, produce alla vista un accorciamento del diametro verticale, e fa apparire l'astro di forma ellittica e non circolare, nella quale ellisse il diametro orizzontale rappresenta l'asse maggiore ed il verticale il minore. Quindi si è calcolata la Tav. XIX. relativamente ad un semidiametro di 15′ 40″; e per gli altri valori basterà aumentare o diminuire proporzionalmente la quantità data dalla tavola; come, per esempio, essendo il semidiametro di 16′ 20″, bisognerà aumentare l'accorciamento di $\frac{2}{47}$ o pure di $\frac{1}{24}$; ed essendo di 15′ bisognerà diminuirlo di $\frac{1}{24}$.

413. *Accorciamento de' semidiametri inclinati.* Quando trattisi di un'altezza ne sarà sufficiente la Tav. XIX. che somministra la quantità dell'accorciamento dovuto al semidiamentro verticale; ma trattandosi di *distanze lunari* sarà d'uopo occuparci della diminuzione relativa ai semidiametri inclinati; dappoichè il contatto nell'osservazione della distanza, può avverarsi in un punto qualunque del lembo dell'astro.

Sia DCBC (*fig. 66*) il disco della luna o del sole, al quale la rifrazione dà la figura ellittica DKBK, poco dal cerchio diversa, e sia il semidiametro verticale AC diminuito della quantità $CK = a$, somministrata dalla tavola precedente o deducendola dalla tavola delle rifrazioni; e finalmente sia per ogni altro semidiametro AE, la cui inclinazione I è misurata dall'angolo EAB, l'accorciamento FE, dinotato dall'ignota y.

Pel punto F si faccia passare la retta HG perpendicolare ad AB. Pe' due triangoli simili AGF ed FEH si avrà

$$AF : FG :: FH : FE, \text{ ma}$$

$$1 : \text{sen}\, I :: AF : FG, \text{ dunque}$$

$$1 : \text{sen}\, I :: FH : y = FH \text{ sen } I.$$

Ma nell'ellisse le coordinate sono proporzionali a quelle del cerchio costruito sull'asse maggiore, e perciò

$$AC : GH :: AK : FG, \text{ donde si ha}$$

$$a : FH :: AC : GH :: AE : GH$$

e senza errore valutabile

a : FH :: 1 : sen I, per la qual cosa

FH $= a$ sen I ; sarà dunque

$y = a$ sen^2 I l'equazione pel semidiametro inclinato AE.

Malgrado la gran semplicità del calcolo di questa formola pel valore della diminuzione y relativa a' diversi valori di a e di I, si è calcolata la Tav. XX. attribuendo ad AC un valore medio di 15′ 40″, per metterla in armonia con la precedente Tavola XIX. ; e però bisognerà aumentare o diminuire il valore di y secondochè varia il valore di AC. Così per un semidiametro di 16′ 20″ l'aumento di y sarà di $\frac{1}{17}$ o presso a poco di $\frac{1}{24}$; e per un semidiametro di 15′ sarà d'uopo diminuire y di $\frac{1}{24}$.

Rimane ora a determinare il valore di I, cioè le inclinazioni de' semidiametri del contatto nelle osservazioni delle distanze lunari. Ma siccome per così tenue quantità y non può arrecare errore da meritare attenzione, il valutare l'inclinazione I ad occhio, molto più quando l'osservatore è bene esercitato, così ci asterremo da ulteriore indagine a questo riguardo.

LEZIONE XXXVII.

Del tempo e sua misura.

414. Essendo il tempo idea primitiva o semplice, ne sia permesso definirlo per esclusiva, e dire : ***il tempo è ciò che per l' attitudine della nostra mente distinguiamo nella successione delle cose, prescindendo dal moto e dallo spazio.***

A misurarlo non evvi mezzo più opportuno del moto, dappoichè un corpo non può trovarsi in più luoghi simultaneamente.

E siccome l'aliquota di una misura esser deve costante ed invariabile, così non riesce acconcio servirsi del moto uniformemente accelerato o ritardato, ma bisogna valersi del moto equabile. D'altronde non si potea fare a meno d'impiegare nella misura del tempo i moti della terra, giacchè essa col moto diurno ne arreca il giorno, e col moto proprio il ritorno delle stagioni.

415. *Distinzione delle stagioni, e disuguaglianza de' giorni e delle notti.* In fatti sia $tTt'T'$ (*fig. 67*) l'orbita della terra, e t,T, t',T' i quattro punti ne' quali si verificano le circostanze per le quali noi distinguiamo la primavera, l'està, l'autunno e l'inverno (111).

Allorchè la terra BAEO è nel solstizio di estate in T, bisognerà che il tropico di cancro AB si trovi tangente il piano dell'orbita, dovendo essere l'arco terrestre AE simile a quello della declinazione del sole, siccome entrambi misurati dall'angolo STE, e quindi di 23° 28'; il meridiano BAO sarà la sezione terrestre del coluro de' solstizî nell'istante di questo fenomeno, e perciò il piano PTS sarà perpendicolare a quello dell'orbita, e l'angolo PTS di 66° 32'. La rotazione che esegue la terra in questo punto dell'orbita dovrà menare successivamente tutti i punti del tropico AB a passare pel raggio vettore ST; e però gli abitanti situati su tutta la circonferenza di AB avranno successivamente il sole allo zenit. Or se s'immagini un piano MTM' perpendicolare ad ST passare per lo centro della terra, esso la dividerà in due emisferi MEM' illuminato, MQM' oscuro: e tutti quei paralleli all'equatore EQ i quali trovansi nell'emisfero del tropico AB avranno l'arco diurno maggiore dell'arco notturno; e viceversa pe' paralleli dell'emisfero opposto; e pel solo equatore l'arco diurno sarà eguale al notturno, poichè i cerchi massimi debbono tra loro intersecarsi in parti eguali. Passata poscia la terra da T in x, essendosi il suo asse P''x serbato parallelo a se stesso PT, ed il cammino che essa percorre essendo curva rientrante, il piano P''xS non più sarà perpendicolare al piano dell'orbita come lo era PTS: vale a dire, che mentre in T la proiezione dell'asse terrestre PT cadeva sul raggio vettore ST, nella seguente posizione in x l'asse P''x non avrà la proiezione su di Sx, ma secondo xy parallela a ST, e facendo un angolo $yx\text{S} = x\text{ST}$, cioè l'asse avrà declinato di tanti gradi da oriente in occidente quanti ne sono nell'arco Tx dalla terra percorso procedendo da occidente in oriente.

L'arco AE compreso tra l'equatore terrestre e il parallelo che tocca l'orbita, diverrà minore, e minore sarà la disuguaglianza degli archi diurni con gli archi notturni reciprocamente in entrambi gli emisferi terrestri; imperciocchè il piano MTM' che divide l'emisfero illuminato dall'emisfero oscuro, dovendo sempre rimanere perpendicolare al rag-

gio vettore si sarà accostato ai poli dell'equatore. Finchè giunta la terra in t' dopo aver percorsi 90° nella sua orbita, l'asse $p't'$ conservatosi sempre parallelo a se medesimo, si troverà esso e la sua proiezione a fare un angolo similmente di 90° col raggio vettore; e però il piano che separa l'emisfero illuminato dall'oscuro dovrà essere un meridiano, e quindi per tutta la terra in generale dovranno essere gli archi diurni eguali ai notturni, o sia avverrà l'equinozio di autunno. Escita appena da questa posizione la terra, il piano di divisione de' due emisferi illuminato ed oscuro, si allontanerà nuovamente da' poli, ma dall'altra parte di ciascuno di essi, fino a che, giunta la terra in T' avverrà la fase opposta a quella avvenuta in T, o sia il solstizio d'inverno; ed arrivata finalmente in t, l'equinozio di primavera.

L'amor della brevità ne induce a risparmiare di esporre minutamente le cose medesime in ciascuno de' detti quattro punti principali dell'orbita; potendovi d'altronde supplire anche la più comune intelligenza nell'ispezionare la figura.

416. *Distinzione del tempo vero e del tempo medio.* Finora intanto, abbiamo supposto che il centro della terra descrivesse un cerchio intorno al sole; ma ciò non è esatto, dappoichè dipendendo la natura della curva da essa descritta, dal rapporto tra l'impulsione e la forza centripreta della terra, in vece tal curva di essere un cerchio è un'ellisse (47); per altro così poco eccentrica, che in molti casi possiamo affatto riguardarla come circonferenza di cerchio. Questa circostanza però non permette che la terra abbia la stessa velocità in tutt'i punti dell'orbita; conciossiachè, trovandosi più vicina al sole dovrà essere più veloce di quando ne sarà più lontana (46); epperò quantunque la sua rotazione sia sempre uniforme, la durata del giorno riesce diversa; e ciò per l'altra circostanza ancora di essere il suo asse inclinato al piano dell'orbita e non già perpendicolare (48).

Volendo quindi prendere il giorno per unità di tempo fu d'uopo mettere in armonia le disuguaglianze della sua durata con l'invariabilità dovuta ad una misura aliquota, e da ciò nacque la distinzione del *tempo vero* e *tempo medio*. Il tempo vero è quello che ha per unità il giorno vero o sia l'intervallo che scorre tra due passaggi consecutivi

di uno stesso semimeridiano innanti al sole ; questo giorno vien diviso in 24 parti uguali, che diconsi *ore di tempo vero.* Il tempo medio poi è quello che la terra impiegar dovrebbe nella sua rotazione tra due consecutivi passaggi dello stesso semimeridiano innanti al sole se il suo moto nell' orbita fosse equabile, e se la rotazione si eseguisse nel senso del piano dell' orbita; ovvero se l'equatore fosse nel piano dell'eclittica.

Il tempo vero intanto dovrà trovarsi per lo più in disaccordo col tempo medio, cioè in dati periodi dovrà trovarsi in ritardo, in altri dovrà trovarsi in avanzo, secondo risulta dalla somma algebrica delle due quantità che affettano il tempo vero, essendo di sua natura il tempo medio sempre della medesima quantità.

Or le due quantità che affettano il tempo vero, dipendenti dalla variabile velocità della terra nella sua orbita, e dalla inclinazione dell'equatore sul piano dell' eclittica, in alcune posizioni hanno lo stesso segno algebrico, in altre lo hanno diverso; quindi si ha che in talune circostanze il suo avanzo o ritardo sul tempo medio è massimo, in altre è minimo, e nelle intermedie il tempo vero ed il tempo medio si agguagliano. Ma fra due massimi in meno e due massimi in più non possono esservi che quattro uguaglianze, ne' quattro passaggi dall' una all' altra posizione, dunque solo quattro volte all' anno il tempo vero si eguaglierà col tempo medio.

Per meglio intendere ciò esaminiamo separatamente gli effetti de' movimenti della terra nella sua orbita:

417. *Influenza che ha la diversa velocità della terra sulla durata del giorno vero.* Riguardo alla sua velocità nell'orbita, quando è più veloce percorrerà maggiore spazio nel tempo della rotazione, cioè percorrerà il massimo spazio giornaliero che è di 61′ 11″; quindi la rotazione costando maggiore spazio di rivoluzione farà risultare il tempo vero in ritardo sul tempo medio: e viceversa allorquando la velocità della terra sarà minima, cioè di 57′ 11″.

Sia S il Sole (*fig. 68*) ed ♎ A ♈ P l'orbita della terra: sia Pm un arco di 59′ 8″, quantità media che la terra percorre della sua orbita nello spazio di un giorno, e sia Pn un arco di 61′ 11″ esprimente la sua massima velocità. Essendo la terra in P all' istante del solstizio di

inverno, le proiezioni dell' asse terrestre Px, e del meridiano CPD cadranno sul raggio vettore SP; e partendo da questo istante del solstizio sarà compiuto il giorno vero quando la terra, percorso l'intero arco Pn pel suo moto di traslazione, avrà nuovamente, pel suo moto di rotazione, incontrato il raggio vettore Sn col piano del meridiano CPD passato alla situazione C'nD'. Ma se il raggio vettore dell'istante in cui compivasi la rotazione fosse stato Sm in vece di Sn; cioè la rotazione della terra si fosse compiuta in m senza attendere che la terra giungesse in n, si sarebbe verificato alquanto prima il caso di aver il raggio vettore per la seconda volta nel piano del meridiano CPD. Dunque la maggior velocità della terra riguardo al tempo medio, farà verificare il mezzogiorno vero dopo del mezzogiorno medio, e perciò diremo che in tal caso il tempo vero sarà in ritardo sul tempo medio.

Ragionando analogamente a questa dimostrazione per gli archi An' ed Am' si avrà che per la velocità della terra minore della media, il tempo vero sarà in avanzo sul tempo medio.

418. *Influenza che ha l'obliquità dell'asse sulla durata del giorno vero.* Riguardo agli effetti della obliquità dell' equatore sul piano dell' eclittica, si avrà che il tempo vero influirà pel ritardo sul tempo medio, quando la terra sarà a' solstizî, ed influirà per l'avanzo quando sarà a' punti equinoziali o nelle loro vicinanze. In fatti sia MPNP' (*fig. 69*) la sezione terrestre del coluro dei solstizî nell' istante del fenomeno, MN quella dell' eclittica, EQ l' equatore, MC ed FN i due tropici. PP' rappresenti la sezione terrestre del coluro degli equinozî, PGP' un meridiano che passi pel punto G ad un grado di distanza da A; e similmente sia EO = 1.°, e vi passi il meridiano POP'.

Gli archi ML ed EO sono simili, e nella stessa durata di tempo dovranno passare innanti al sole tutti i punti dal meridiano PLBP' al meridiano PMEFP'. Nel triangolo sferico BOA, abbiamo per la sua condizione l'ipotenusa BA, maggiore del cateto OA, e quindi BM minore di EO; laonde mentre passa avanti il sole un grado dell'equatore, passerà meno di un grado dell' eclittica; e perciò, contando noi il tempo sull' equatore, avremo che in questa posizione l'obliquità dell'equatore sul piano dell'eclittica influisce al ritardo del tempo vero sul tempo medio.

Del pari, da che passa il meridiano PAP′ avanti il sole, finchè vi passi il meridiano PDGP′, traverserà dell'equatore l'arco AG e della eclittica l'arco AD; ma questo come ipotenusa è maggiore del cateto AG, essendo gli angoli obliqui entrambi minori di 90° (288), adunque passerà innanti al sole più arco di eclittica che non di equatore nella stessa durata di tempo; e poichè noi contiamo il tempo sull'equatore, avremo che in questo caso la inclinazione dell'equatore sull'eclittica, influisce all'avanzo del tempo vero sul tempo medio.

419. *Confronti dei tempi vero e medio.* Immaginiamo ora di partire da uno de' punti determinati, come dal 24 dicembre in cui il giorno vero è uguale al giorno medio (*fig. 70*). Allora, essendo da poco scorso il solstizio d'inverno, la terra trovasi quasi nella sua massima velocità, e trovasi dippiù pressochè al tropico di cancro, circostanze entrambi concorrenti a far ritardare il tempo vero rispetto al tempo medio. Questo ritardo si accumula ne' successivi giorni del 25, 26 ec., finchè nel 10 febbraio, divenuto di 14′ 35″ cambia segno; ma continua il tempo vero a trovarsi in ritardo, finchè non giunge a compensarsi, il che avviene al 15 aprile, giorno in cui sarà per la seconda volta il giorno vero eguale al giorno medio. Ma intanto il cambiato segno continua: cioè continua ad anticipare il giorno vero sul giorno medio, finchè nel dì 15 maggio diviene massimo in più per 3′ 56″ sul tempo medio. Da questo giorno cambia segno la differenza diurna, ma prosiegue il tempo vero a trovarsi in avanzo sul tempo medio, fino a che le accumulazioni del segno meno della differenza diurna, non avranno arrecata l'eguaglianza nel giorno 15 giugno.

Così continuando a ragionare avremo un secondo massimo in meno per 6′ 8″ nel dì 25 luglio; una quarta eguaglianza nel dì 1.° settembre, e finalmente un secondo massimo in più di 16′ 17″ nel giorno 1.° novembre.

Or per riassumere quanto si è finora esposto, benchè basti rivolgere l'occhio alla (*fig. 70*), ne sia permesso esporre il seguente quadro:

Epoche de' quattro cambiamenti di segno del tempo vero sul tempo medio, e delle loro quattro uguaglianze annuali.

GIORNI delle MASSIME DIFFERENZE.	UGUAGLIANZE del TEMPO VERO E MEDIO.	SEGNO della DIFFERENZA DIURNA.
in — 14′ 35″ a 10 feb.	. . . .	il segno diviene +
	a 15 aprile.	
in + 3′ 56″ a 15 mag.	. . . .	» diviene —
	a 15 giugno.	
in — 6′ 8″ a 26 luglio	. . . .	» diviene +
	al 1.° settembre.	
in + 16′ 17″ a 1.° nov.	. . . .	» diviene —
	a 24 dicembre.	

Queste epoche però de' quattro cambiamenti di segno, o sia dei due massimi in più e de' due massimi in meno della differenza tra il giorno vero e il medio; e quelle delle quattro eguaglianze de' tempi non restano sempre le stesse, ma subiscono certe varietà dipendenti dal movimento del grande asse dell' orbita.

Così valutato il giorno in quantità media da un mezzodì all' altro, sarà esso sempre di eguale durata, ed eguali saranno ancora le sue parti, cioè le ore, i minuti, ec.

La differenza poi tra il tempo vero e 'l tempo medio è ciò che chiamasi *equazione del tempo.*

420. *Del tempo sidereo.* Oltre il tempo vero e 'l tempo medio contano gli astronomi un altro tempo detto *sidereo*, e questo si ha dalle stelle fisse. Non cangiando esse di luogo, e rotando la terra intorno al proprio asse con moto sempre uniforme, a capo di una rotazione un punto di essa ritornerà ne' successivi piani dai quali è partito e che passano pel centro della terra e per le stelle, essendo nulla ogni specie di loro parallasse, per l' immensa distanza alla quale si trovano.

Quindi l'intervallo tra il passaggio e il ritorno di uno stesso semimeridiano ad una stella dinoterà la *quantità assoluta di una rotazione terrestre*, la quale essendo invariabile, ci presenta una costante ed esatta misura del tempo, avente tutte le condizioni indispensabili ad una misura che debbesi adottare per aliquota costante.

Per ben concepire la differenza tra il tempo solare ed il tempo sidereo, cominciamo dall'esaminare separatamente gli effetti prodotti così dal moto di rotazione, che da quello di traslazione e dal parallellismo dell'asse.

421. *Effetto della rotazione.* È ben chiaro che se la terra non avesse altro moto che quello della rotazione, quante volte si aggirerà sul proprio asse altrettante presenterà ciascun suo semimeridiano ad ogni punto interno od esterno dell'orbita; e quindi per 366 rotazioni vi sarebbero 366 giorni solari e 366 giorni siderei.

422. *Effetto della traslazione.* Se la terra non avesse che il solo moto di traslazione; dopo aver percorsa la metà della sua orbita T♎T' (*fig. 71*), giunta da T in T' si troverebbe non già nella situazione A'B' come avviene pel parallelismo dell'asse (415), ma si troverebbe con A' al di dentro dell'orbita; in guisachè lo stesso diametro terrestre AB rimarrebbe sempre in linea retta col raggio vettore e nello stesso senso; e però, mentre la terra, durante una sua rivoluzione, esporrebbe successivamente tutti i punti di una qualunque sua circonferenza di cerchio perpendicolare all'asse, ad un punto M preso ad arbitrio esteriormente all'orbita, non cangerebbe mai di aspetto riguardo ad S, centro della sua rivoluzione (69). Laonde deve conchiudersi che la rivoluzione di un pianeta isolatamente considerata, mentre equivale ad una rotazione rispetto ad un punto fuori dell'orbita, non produce nessun effetto di rotazione rispetto al centro dell'orbita; ed in conseguenza il compiere la sua traslazione la terra darà un giorno sidereo, e nessuno giorno solare.

423. *Effetto del parallellismo dell' asse.* Finalmente, per la proprietà di serbare la terra il suo asse di rotazione sempre parallelo a se

stesso, bisognerà che a misura che essa descrive un arco della sua orbita da occidente in oriente, il suo asse ne descriva uno simile da oriente in occidente (415); e però, compiuta la rivoluzione, si troverà l'asse della terra aver descritti 360° in senso contrario alla rivoluzione ed alle rotazioni, la qual cosa importa la detrazione di un giorno sidereo e di un giorno solare.

Sicchè, lasciando da parte la frazione per comodo del ragionamento, avremo:

	NUMERO DE' GIORNI DURANTE UNA RIVOLUZIONE,	
	SIDEREI.	SOLARI.
Per 366 rotazioni	366	366
Per effetto della traslazione	+ 1	0
Pel parallellismo dell' asse	— 1	— 1
Giorni dell' anno	366	365

424. *Differenza tra il giorno sidereo e il giorno medio.* Or se supponghiamo essere il punto M a distanza così enorme dalla terra, p. e. sia una stella fissa, da doversi considerare come nulla l'ampiezza dell' orbita terrestre, allora un suo diametro non offrendo angolo parallattico rispetto alla stella, le rette menate da questa al centro della terra saranno tutte tra loro parallele, qualunque sia il punto dell' orbita in cui la terra si trovi; per modo che se la terra fosse priva di rotazione, e solo avesse rivoluzione e parallellismo dell' asse si avrebbe in permanenza la stella M allo stesso meridiano; dovendosi compensare continuamente la rotazione derivante dalla rivoluzione, perchè la stella è punto esterno dell' orbita, con la rotazione in senso inverso descritta dall' asse durante la rivoluzione, in virtù della proprietà del suo parallellismo; e però dobbiamo considerare come la terra e la sua orbita occupasse un sol punto nello spazio, rispetto alla infinita distanza delle stelle fisse.

425. *Paragone dei giorni medio e sidereo.* Giacchè adunque i giorni solari e i siderei dipendono esclusivamente dalla rotazione della terra intorno all'asse, passiamo ad esaminare qual rapporto hanno essi tra loro.

Rappresenti (*fig. 71*) TT″ $\frac{1}{366}$ dell'orbita: tostochè la terra sarà giunta da T′, in T″, il meridiano A′B′ giungerà nella situazione A″B″ cioè avrà nuovamente la stella M nel suo piano e sarà compiuto il giorno sidereo, priachè esso meridiano giunga al raggio vettore ST″, mancandovi ancora tanto di rotazione quanto ne rappresenta l'angolo B″T″S = T″ST′ = $\frac{1}{366}$ di 360°. Vale a dire, la rotazione compita per riguardo alla stella fissa costa di $\frac{365}{366}$ di rotazione effettiva, e di $\frac{1}{366}$ di traslazione: laddove se facciamo che T′T″ rappresenti $\frac{1}{365}$ dell'orbita, allorchè il meridiano A′B′ incontrerà la seconda volta il raggio vettore ST″, saranno effettivamente compiti i 360° di rotazione; imperciocchè se la terra si è avanzata di $\frac{1}{365}$ nella sua orbita, di altrettanto l'ha seguita il raggio vettore ST″ col suo movimento angolare. Laonde la differenza tra il giorno solare medio ed il giorno sidereo sarà rappresentata dall'angolo ST″B″, o sia dall'arco T′T″, il quale come abbiamo già detto è di 59′ 8″, 2; e questo, ridotto in tempo ci darà la quantità 3′ 56″, 33 di cui il giorno sidereo è costantemente minore del giorno medio.

426. Gli astronomi sogliono servirsi del tempo sidereo in preferenza; poichè le osservazioni dirette alle stelle offrono sempre maggior precisione e sicurezza che non quelle dirette al sole: e di più, avvegnachè un punto qualunque della terra non avrà roteato intorno all'asse per 360° se non quando sarà compiuto il giorno solare, questo però dovendo ancora comprendere la quantità derivante dalla seguita parte di traslazione, offrirà sempre nell'insieme una quantità maggiore di una circonferenza di cerchio; mentre per l'opposto il giorno sidereo dà sempre, tutto in complesso, 360° costantemente. In mare però dove non possono adoperarsi che strumenti maneschi, e bisogna d'altronde per necessità servirsi dell'orizzonte vero, che può ben distinguersi solo di giorno, si fa uso esclusivamente del tempo solare; e per tal fine le distanze lunari e tutti gli altri dati cui esibiscono le effemeridi destinate

all'uso della navigazione sono calcolate a tempo solare, come *La connaissance des temps* di Parigi, e *The nautical almanack* di Greenwich, entrambi in tempo medio.

427. ***Diversità degli anni.*** La sola conoscenza della misura del giorno non è però sufficiente per gli usi della società, nè per gli usi della navigazione, e ci bisogna chiarire l'intervallo di tempo nel quale la terra finisce il suo corso per l'orbita, o sia la durata del tempo nel quale essa ritorna al punto donde era partita, per conchiuderne il ritorno delle stagioni, ed il sito dell' orbita in cui essa trovasi; o in altri termini, ci è indispensabile conoscere la durata dell'anno.

L'*anno* nella più grande estensione della voce è un periodo o spazio di tempo misurato colla rivoluzione di qualche corpo celeste nella sua orbita (19). Così il tempo nel quale le stelle fisse fanno una rivoluzione, vien detto il *grande anno* (52), ed i tempi nei quali Giove, Saturno, la Luna, ec. finiscono le loro rivoluzioni e ritornano allo stesso punto dello zodiaco sono rispettivamente chiamati ***anno di Giove*, *anno di Saturno*, *anno della Luna*, *ec.***

Noi però per antonomasia intendiamo con la voce *anno*, propriamente l'anno solare, o lo spazio di tempo nel quale la terra percorre la sua orbita; ed inoltre per anno lunare intendiamo il periodo di 12 lunazioni.

Or comechè potrebbe prendersi un punto qualunque dell' orbita per la determinazione dell' anno, pur nondimeno gli astronomi sogliono servirsi o di uno de' due punti degli equinozî, o di uno di quelli dei solstizî, siccome più facili a determinarsi. E se l'equinozio si verificasse sempre allo stesso punto dell'orbita, una rivoluzione della terra si compirebbe nello stesso tempo in riguardo all' intervallo fra due equinozî successivi dello stesso nome, ed in riguardo ad una stella fissa; ma poichè pel movimento conico dell' asse della terra, il punto dell' equinozio retrograda in sull'orbita della quantità 50″ 1 (51), per percorrere la quale la terra impiega 20′ 19″, 9; così si è venuto alla distinzione di *anno tropico* ed *anno sidereo*. L'anno tropico è il tempo che scorre tra due equinozî o due solstizî consecutivi dello stesso nome: esso è stato determinato di giorni 365 5ʰ 48′ 49″, 7 in quantità media; im-

perciocchè l'anno tropico non è, nè può essere sempre della medesima quantità, sì a motivo che la precessione degli equinozî va soggetta ad alcune piccole alterazioni, sì perchè l'archetto dell'orbita che la misura, corrispondendo a siti diversi, diversa sarà la parte di equatore che vi corrisponde, e perciò diversa la quantità di tempo (418). Questa variazione dell'anno tropico però essèndo ristretta ne' limiti di pochi secondi, non vien considerata che in pochi casi speciali. Intanto, assumendo per anno tropico la detta quantità di giorni 365 5ʰ 48′ 49″,7, risulterà l'anno sidereo di giorni 365 6ʰ 9′ 9″,6.

Oltre a' detti due anni distinguono gli astronomi un terzo anno, detto *anomalistico*: esso dipende dal movimento del grande asse dell'orbita terrestre, il quale fa avanzar l'afelio nell'ordine de' segni di 11″, 8 in ogni anno; in guisachè partendo la terra, per esempio dal perielio, allorquando avrà compiuta la rivoluzione siderea, il perielio si sarà avanzato di 11″,8; e per raggiungerlo nuovamente bisognerà che la terra impieghi di tempo altri e 4′39″,7 che aggiunti a giorni 365 6ʰ9′9″,6, daranno per durata dell'anno anomalistico 365ᵍ 6ʰ 13′ 49″, 3.

Finalmente per *anno civile* intendiamo il periodo stabilito da ciascuna nazione per misurare i lunghi intervalli di tempo: esso quantunque siasi sempre fatto di un numero di giorni interi, è stato in differenti epoche, e presso diversi popoli variamente stabilito; nè tutti hanno ricorso a' moti della terra che in allora si attribuivano al sole, ma ancora spesso a quelli della luna.

428. *Del calendario.* Infatti l'anno antico de' Romani era l'anno lunare, il quale come fu la prima volta diviso da Romolo consisteva in 10 mesi solamente, cioè marzo 31, aprile 30, maggio 31, giugno 30, quintile 31, sestile 30, settembre 30, ottobre 31, novembre 30, e dicembre 30, cioè in tutto 304 giorni. Quindi il cominciamento dell'anno di Romolo, essendo vario ad ogni precisa stagione, ordinò questo principe di aggiungersi altrettanti giorni in ogni anno, quanti ve ne eran d'uopo per la corrispondenza delle stagioni, senza però ordinarli in mesi.

Numa Pompilio corresse questa irregolare formazione dell'anno, aggiungendo febbraio di 28 giorni e gennaio di 29, e ottenne così un

anno di 361 giorni; il quale benchè eccedesse di un giorno l'anno lunare, che facevasi allora di 360 giorni, computando ogni lunazione per giorni 30, non corrispondeva però al periodo di una rotazione terrestre che in allora con linguaggio geocentrico addimandavasi *corso solare*, e doveva mantenersi l'uso de' giorni intercalari, del che si affidò l'incarico al Flamine Diale, o Sommo Pontefice.

429. *Stile giuliano*, *o vecchio stile*. I primi a contare l'anno sul moto proprio del sole, per quanto è a nostra notizia, furono gli Egizî che lo stabilirono tra due sorgeri eliaci di sirio; da questi passò tale uso a' Greci e quindi ai Romani, i quali essendo divenuti già potenti verso l'anno 302 della fondazione di Roma vollero provvedersi di leggi stabili e scritte; ed inviarono all'uopo de' magistrati in Grecia, e nelle città greche d'Italia, i quali al ritorno recarono ancora un miglioramento pel calendario, e fu stabilito l'anno solare di 365 giorni: gennaio 31, febbraio 28 ec. Ed in tal guisa fu menato innanzi il calendario, finchè assunto Giulio Cesare a tutte le prime dignità dello stato, volendo pur distinguersi nella qualità di Sommo Pontefice pensò a regolare il calendario; e fatto venire in Roma il famoso matematico Sosigene, coi lumi di costui fu stabilito che essendo l'anno solare di giorni 365 5^h 48′ 49″, si fossero contati per tre anni consecutivi 365 giorni, e pel quarto 366. E onde supplire ai giorni perduti per l'ignoranza de' Flamini suoi predecessori, fece che quell'anno consistesse in 455 giorni, ossia 15 mesi, per la qual cosa fu chiamato *anno di confusione*. Ed intanto determinò che questo giorno intercalare o addizionale dovesse situarsi al sesto giorno delle calende di marzo il quale corrisponde al 24 di febbraio; e quindi siccome in quell'anno numeravano due volte quel giorno, ed avevano *bis sexto calendas*, l'anno venne detto *Bisestile*. Questo giorno intercalare però si computa da noi alla fine di febbraio, che essendo negli anni comuni di 28 giorni, in quell'anno viene a contarne 29.

430. *Stile gregoriano o nuovo stile*. La quantità intanto dell'anno giuliano è di giorni 365, 6^h i quali eccedono il vero di circa 11′, che nello spazio di 131 anni importano poco più di un intero giorno.

E così stette l'anno romano sino alla riformazione fattane da Papa Gregorio XIII. L'errore degli 11′ circa dell'anno Giuliano, piccolo come era divenne considerevole, e dal tempo della correzione fino a Papa Gregorio era cresciuto di 13 giorni, e di giorni 10 dal tempo in cui il Concilio di Nicea stabilì le feste mobili. La diversità di tempo in cui accadevano esse da parecchi anni, avea attirata l'attenzione de' Pontefici suoi antecessori, che stimatane difficilissima la correzione non la eseguirono. Ma Papa Gregorio, su la proposta dell'astronomo calabrese Aloisio Lilio, per ovviare all'inconveniente degli 11′ in ogni anno superflui, stabilì, che siccome essi in un secolo formano quasi 18 ore, così tre anni centesimi di continuo fossero fatti comuni, invece di bisestili, ed il quarto anno centenario solamente venisse computato bisestile; per la qual cosa il calendario non avrà bisogno di riforma se non dopo 120 secoli.

Intanto per l'andamento regolare del calendario, Papa Gregorio ordinò, che il 5 di ottobre di quell'anno venisse detto 15 dello stesso mese, ed in tal guisa fece corrispondere l'andamento dell'anno allo stabilito dal Concilio, e principalmente intorno alla Pasqua che celebrar devesi la prima domenica dopo il plenilunio pasquale, cioè dopo la quattordicesima luna di marzo, che non avvenga prima del giorno 20; vale a dire la prima domenica più vicina e posteriore all'equinozio di primavera ed al pleniluno pasquale.

LEZIONE XXXVIII.

Dei cronometri o mostre marine.

431. Avendo già determinate le diverse unità di tempo sidereo, medio e vero, e i diversi computi che ne derivano, bisognerà avvalerci dell'uso de' *cronometri* o *mostre marine* per tener conto delle frazioni di tali unità.

I cronometri o mostre marine altra cosa non sono che degli oriuoli a molle, la cui costruzione è portata a tal grado di perfezione ed esattezza in tutte le sue parti, da ottenerne un andamento quasi equabile per più mesi di seguito, solo che si tenga conto della variazione diurna

e della diversa temperatura dell'atmosfera; in guisa che col loro mezzo siamo in grado di conoscere in qualunque istante del giorno a bordo di una nave, dovunque essa sia, l'ora che nello istante medesimo si conta sotto il meridiano di partenza, o sotto quel meridiano per lo quale fu il cronometro regolato. Tale oriuolo è sospeso alla cardanica in una cassetta di legno di figura parallelepipeda assai ben condizionata.

Questa conoscenza di ora contata nel medesimo istante a bordo e sotto il meridiano di partenza ne mena immediatamente a conchiudere qual sia la longitudine della nave (104) come a suo luogo vedremo.

Gl' indici degli oriuoli intanto dovendo percorrere archi eguali in tempi eguali, non potranno indicare che i soli tempi equabili, cioè il tempo medio o il tempo sidereo, e non mai il tempo vero. Con l'aiuto però della *Connaissance des temps* saremo sempre in grado, mercè semplici riduzioni, di avere la quantità di tempo espressa come meglio ne conviene, sia che il cronometro trovisi regolato sul tempo medio o sul sidereo; ma i marini generalmente regolano i cronometri sul tempo medio, sì perchè le loro osservazioni sono più spesso dirette al sole che alle stelle, e sia perchè analogamente a questo principio, le effemeridi sono egualmente tutte calcolate a tempo medio.

432. Una delle principali operazioni da eseguirsi nel cronometro è quella di rimetterlo in movimento qualora sia stato arrestato per una circostanza qualunque, il trasporto per esempio.

Questa operazione costa generalmente di due parti, nè può essere bene eseguita, che a terra.

Nella prima si determina il suo andamento diurno, cioè la quantità di cui il cronometro avanza o ritarda in 24 ore sul tempo medio; nella seconda poi si cerca il numero delle ore, minuti e secondi di cui il cronometro avanza o ritarda sul tempo medio del meridiano a cui si rapporta, come quello di Parigi, per esempio; la quale quantità si denomina *stato assoluto del cronometro*.

A tal uopo, dopo aver caricato il cronometro si terrà con le mani in una posizione orizzontale, imprimendogli un leggiero movimento circolare che si comunicherà al bilanciere, e porrà all'istante l'oriuolo in movimento: si caricherà in seguito tutti i giorni all'istessa ora nove-

rando il numero delle girate, mentre il forzar l'ultimo stadio della molla cagionerebbe de' serii inconvenienti. Viene dagli artisti raccomandato immensamente che la mano che sostiene il cronometro durante la carica sia possibilmente immobile, onde non imprimere qualche sconcio movimento al bilanciere della macchina, particolarmente nel senso circolare, giacchè questo influisce precipuamente sui moti isocroni del medesimo; precauzione che mancando potrebbe alterare il giusto andamento del cronometro, e qualche volta arrestarlo del tutto.



La cassettina di legno nella quale si contiene quella del cronometro, suole essere corredata di un manico di pelle da servire pel trasporto; questo metodo però è totalmente da bandirsi, giacchè un minimo movimento anche involontario della mano produce un' alterazione sensibile sui moti tanto regolari del bilanciere; quindi allorchè si sarà nella necessità di trasportare il cronometro da un punto ad un altro, dopo averne arrestata la sospensione cardanica con una molle all' uopo immaginata, l' azione del bilanciere si raccomanda alle due mani in sito orizzontale.

433. Qualche giorno prima della partenza essendosi il cronometro trasportato a bordo, dopo di avere usate tutte le precauzioni poc' anzi indicate, bisognerà mettere tutta la cura possibile nella scelta di un luogo il meno esposto alle agitazioni del bastimento, cautelato da qualunque danno che potesse venirgli da causa estranea; e però non sarà questo il fodero di un armadio, nè una tavola, sulla quale possa venir sospeso: infine bisogna che in tal luogo concorra il comodo del servizio, compatibilmente con la indispensabile uniformità de' movimenti del cronometro.

Suol mettersi il cronometro in una cassettina quadrata praticata nel centro del bajo il più vicino alla paratea prodiera della camera degli ufiziali; guarnita dalla parte laterale di un coverchio a cernicra onde potervelo con facilità introdurre. La parte interna di questa cassettina sarà interamente foderata di panno; e l' esperienza ha dimostrato, che il mezzo il quale meglio conferisce all' esatto andamento del cronometro, si è di posarlo sopra uno strato non molto sottile di segatura di legno; e ciò ancora in preferenza della libera sospensione dell' intera cassettina

che lo sostiene; e di non mai rimuoverlo dal suo sito. Infine si procureranno tutti i mezzi affinchè questa macchina venga conservata con la massima diligenza.

434. *Della mostra a secondi.* A tale oggetto si è fornito il marino di una buona *mostra a secondi morti*, dalla quale possono ottenersi le quantità di tempo corrispondente alle osservazioni che praticar si dovrebbero col cronometro; mentre è ben difficile che nella breve durata di tempo delle osservazioni vi fosse tale alterazione nei suoi movimenti, da nuocere all'esattezza dei calcoli astronomici: quantità per altro che emerge di fatto, quante volte si esegua il confronto della mostra a secondi col cronometro, prima e dopo l'osservazione.

435. *De' confronti.* Per eseguire i confronti con precisione sarà utile attendere che il cronometro indichi l'istante in cui dinoti de' minuti primi esattamente; indi rivolgere l'occhio alla mostra, ed al modo esposto al § 361 dedurre l'ora a questa corrispondente con tutta l'esattezza fino ai decimi di secondi. Non consigliamo di procedere inversamente, cioè dalla mostra al cronometro, per non forzare la memoria dell'osservatore a ritenere i due rapporti delle battute della mostra e del cronometro relativamente al secondo di tempo; mentre essendo la conoscenza del primo indispensabile (361), sarà utile avvalerci del medesimo ancora nel caso de' confronti: quando non fosse per altro, per ottenere il vantaggio dell'esercizio all'orecchio.

Esempio de' confronti.

	Mostra		Cronometro	
1.° confonto	$7^h\ 47'\ 12''$	$7^h\ 47'\ 12''$	$10^h\ 34'$	$10^h\ 34'\ 00''$
istante dell'osservazione		7 53 19,2		φ
2.° confronto	8 07 57		10 55	
	20 45 :	6 07,2 ::	21 : x =	6 11,4
Ora del cronometro all'istante dell'osservazione				φ = 10 40 11,4

Della mutua conversione de' tempi, vero, medio e sidereo.

436. Facendo i marini quasi tutte le loro osservazioni sul sole, riferiscono alle sue posizioni quelle di tutti gli altri astri, che per una ragione qualunque sono obbligati ad osservare; e però sono continuamente nella necessità di ridurre il tempo vero in tempo medio, ed il tempo medio in tempo vero; e spesso ancora di dover ridurre il tempo medio in tempo sidereo, e viceversa (431).

Noi adunque ci occuperemo di assegnare con la scorta delle teoriche anzidette, le norme secondo le quali si ottiene il più speditamente possibile lo scopo che ne' diversi casi possiamo all' oggetto proporci.

437. *Della riduzione del tempo vero in tempo medio e viceversa.* È ben chiaro che per eseguire questa conversione di computo riguardo al tempo, basta conoscere l' equazione del tempo, la quale benchè varii ad ogni istante, trovasi ordinariamente nell' effemeridi per tutti i giorni a mezzodì. E nella *Connaissance des temps* di Parigi di cui si fa uso nella Real Marina, in vece dell' equazione del tempo s' indica l' ora che un pendolo o un oriuolo esattissimo e regolato sul tempo medio, segnerebbe all' istante del passaggio del meridiano innanti al sole. Tal quantità si trova sotto il titolo *tempo medio a mezzodì vero*; e vi si trova per tutti i giorni all' istante in cui si conta il mezzogiorno vero all' Osservatorio di Parigi; quindi stabiliremo le due seguenti regole:

1.ª Conoscendo il tempo vero corrispondente ad un istante qualunque, e si voglia questo ottenere in espressione di tempo medio, basterà aggiungere all' ora proposta il tempo medio a mezzodì vero.

2.ª Se al contrario si conosce un istante in tempo medio e lo si brami in espressione di tempo vero, basterà togliere dal tempo medio proposto, il tempo medio a mezzodì vero.

Da queste due regole è manifesto esser prima necessario trovare il *tempo medio a mezzodì vero* pel meridiano del luogo quando esso sia diverso dal meridiano delle tavole. Ciò sarà facile essendochè la *Connaissance des temps* esibisce per tutti i giorni dell' anno il *tempo medio a mezzodì vero* pel meridiano di Parigi; laonde mercè le parti

proporzionali del cangiamento in 24 ore di così fatta quantità, infra i due mezzodì tra quali corrisponde l'ora di Parigi, si troverà il *tempo medio a mezzodì vero* pel meridiano del luogo; indi si procederà con le anzidette regole alla conversione del tempo vero in tempo medio. Quando per lo contrario vogliasi esprimere in tempo vero una quantità data in tempo medio, sarà d'uopo avere l'*equazione del tempo* non più relativa al mezzodì *vero*; ma l'*equazione del tempo a mezzodì medio.* Noi la otterremo col sussidio della tavola XXI la quale esibisce, col corrispondente segno, la quantità che aggiunta all'equazione del tempo a mezzodì vera, ne somministra l'*equazione del tempo a mezzodì medio.*

Esempio del 1.° caso.

Il 12 dicembre 1833, essendo in long. 17° OP si vuol convertire in tempo medio, l'ora vera 8 22 a. m. del luogo.

Ora astronomica del luogo, il dì 11	20^h	$22'$	$00''$
Longitudine in tempo	+ 1	8	
Ora di Parigi il dì 11 dicembre.	21	30	00

Cangiamento in 24^h. .	+ 27'',8	
per 12^h . . .	13	,9
6 . . .	6	,95
3 . . .	3	,475
0 30 . .	0	,579
parti propor. per 21 30 . .	24	,9

t. m. a m. v. di Parigi a 11 dic.	11	53	18,3
p. p. per 21^h $30'$ . .		+	24.9
t. m. a m. v. a bordo .	11	53	43,2
ora t. v. del luogo . .	8	22	
tempo m. a bordo . .	8	15	43,2

Esempio del 2.° caso.

Il dì 12 dicembre 1833, essendo in long. 17° OP si vuol convertire in tempo vero l'ora media 8^h $15'$ $43''$,2 a m. del luogo.

Tempo medio astronomico a bordo il di 11 dicembre. . . .	20^h	$15'$	$43''$	,2
Longitudine della nave in tempo . . . . : .	+ 1	08		
Tempo medio di Parigi il dì 11 dicembre	21	23	43	,2
Tempo m. a m. v. di Parigi il dì 12 dicembre (più prossimo) . .	11	53	46	,1
Differenza delle due equazioni di tempo		+	0	,1
Equazione del tempo a mezzodì m. di Parigi a 12 dicembre.	11	53	46	,2
Cangiamento in 24^h. . . . 27'',8				
per 2 ore. . . . . 2 ,316				
per 0,30'. . . . . 0 ,579				
per 0,06'. . . . . 0 ,116				
parti propor. per 2^h $36'$ . . 3 ,011		—	3	,0
Tempo m. a m. v. pel meridiano della nave.	—11	53	43	,2
Ora di tempo medio proposta	20	15	43	,2
Tempo vero corrispondente all'ora proposta.	8	22		

438. ***Della conversione del tempo sidereo in medio, e viceversa.*** Essendo entrambi equabili queste due specie di tempi, non vi sarà d'uopo d'altra riduzione per ognuno di essi che di quella dell' unità cui si riferisce l' altro. Quindi essendo le 24 ore di tempo medio eguali a $24^h\ 3'\ 56'',56$ di tempo sidereo, e 24 ore di tempo sidereo uguali a $23^h\ 56'\ 4''$ di tempo medio, così basterà esibire in due tavole la corrispondenza delle diverse quantità di tempo medio espresse in tempo sidereo, e viceversa le quantità di tempo sidereo espresse in tempo medio: laonde stabiliremo le due seguenti regole.

1.ª ***Conversione del tempo sidereo in medio.*** Dal dato tempo sidereo, accresciuto se occorre di 24 ore, si tolga il tempo sidereo a mezzodì medio, ridotto alla data longitudine, se si sta fuori del primo meridiano; il residuo darà il tempo sidereo scorso dal mezzodì medio. Questo diminuito della correzione data dalla tavola che suole denominarsi dell'accelerazione delle stelle fisse, e che nella ***Connaissance des temps*** porta per titolo ***Conversione del tempo sidereo in medio,*** darà il tempo medio richiesto.

Esempio.

Vogliasi ridurre $7^h\ 40'\ 10''$ di tempo sidereo del dì 25 maggio 1840, in tempo medio; essendo in longitudine 90° EP.

AR ☉ a m. m. del 25 maggio	4^h	$09'$	07,80		
tempo medio a mezzodì vero . . . . . . —	11	56	37,11		
tempo sidereo a m. v. a Parigi.	4	12	30,69		
Differenza delle equazioni, tav. XXI . .			— 01		
tempo sidereo a mezzodì medio il dì 25 maggio a Parigi	4	12	30,68		
parti proporzionali per 6 ore di differenza di longitudine tav. XXIII		—	59,14 Est		
tempo sidereo sulla nave a mezzodì medio del dì 25 maggio	4	11	31,54	per 3^h . .	29'' 49
tempo sidereo della nave *dato*.	7	40	10,00	per 28' . .	4 59
tempo sidereo scorso dal mezzodì medio. .	3	28	38,46	per 38''. .	0 10
Correzione per la XXII tavola		—	34,18	. . . .	34 18
tempo medio richiesto	3	28	04,28		

2.ª ***Convertire il tempo medio in tempo sidereo.*** Al dato tempo medio, si aggiunga la correzione per la tavola XXIII, ed indi il tempo sidereo a mezzodì medio, con la corrispondente correzione per la differenza di longitudine, la somma darà il tempo sidereo richiesto.

Esempio.

Vogliasi ridurre $3^h\ 28'\ 04''\ 28$ di tempo medio in tempo sidereo il giorno 25 maggio 1840, essendo nella longitudine 90 EP.

tempo medio a bordo il dì 25 maggio .		$3^h\ 28'\ 04''\ 28$	per $3^h = 29''\ 57$
Correzione per la XXIII tavola		34 18	per $28' = 4\ 60$
tempo sidereo a mezzodì medio a Parigi . .	$4^h\ 12'\ 30''\ 68$ *come sopra*		per $4'' = 0\ 18$
parti proporzionali per 6^h diff. di long. EP.	59 14		34 18
tempo sidereo a mezzodì medio a bordo . .	4 11 31 54	4 11 31 54	
tempo sidereo richiesto		7 40 10 00	

439. Per potersi adunque trarre dal cronometro tutto il possibile profitto, bisognerà tener conto esattissimo della sua variazione diurna, dal giorno della partenza in poi; e dell'anticipo o ritardo che esso aveva sul meridiano del luogo cui si è stabilito riferirne l'andamento: quantità denominata *stato assoluto* del cronometro. E perciò lo stato assoluto del cronometro è la quantità di cui esso trovasi in avanzo o ritardo sul mezzodì in tempo medio del meridiano del luogo ove fu regolato. Quindi per aver l'ora t. m. dal cronometro in un istante qualunque, basterà moltiplicare la variazione diurna pel numero dei giorni, ore, minuti primi, minuti secondi, e decimi di secondi, scorsi dal mezzodì dell'ultimo giorno in cui fu regolato sino all'istante proposto.

440. Per abbreviare questa parte di calcolo, ed evitare gli errori che possono commettersi in tali riduzioni, i più accorti calcolatori stabiliscono preventivamente, per la presunta durata della corsa, una piccola tavola indicante l'ora che il cronometro deve segnare in ogni mezzodì medio a Parigi; e le parti proporzionali del suo andamento diurno, per tutte le ore, e pe' minuti necessarî a dedurre quelle di tutti gli altri. Anzi alcuni vi aggiungono ancora per semplice comodo un'altra colonna nella quale notano per mezzo della equazione del tempo, l'ora che il cronometro segnar deve a mezzodì vero di Parigi; onde con la sola operazione di ridurre in tempo la differenza di longitudine, possa aversi dallo stesso cronometro l'ora in tempo vero in qualunque istante del giorno.

Esempio.

Il dì 18 novembre 1840 a mezzodì, tempo medio di Parigi si è determinato lo stato assoluto del cronometro $1^h\ 11'\ 15''\ 68$; il cui andamento diurno è $+\ 18'',04$.

GIORNI.	ORA DEL CRONOMETRO		PARTI PROPORZIONALI	
	a mezzodì t. m. di Parigi.	a mezzodì t. v. di Parigi.	per le ore.	pe' minuti.
18 novembre	$+ 1^h 11'\ 05'',68$	$0^h\ 56'\ 31'',11$	24 . . + 18'',04	60' . . + 0'',75
19	1 11 23 ,72	0 57 02 ,82	23 . . . 17 ,29	30 . . . . 0 ,38
20	1 11 41 ,76	0 57 35 ,36	22 . . . 16 ,54	15 . . . . 0 ,19
21	1 11 59 ,80	0 58 08 ,70	21 . . . 15 ,79	5 . . . . 0 ,06
ec. ec.	ec. ec.	ec. ec.	20 . . . 15 ,03	3 . . . . 0 ,04
			19 . . . 14 ,28	2 . . . . 0 ,02
			ec. ec.	1 . . . . 0 ,01

441. Or siccome la prudenza esige di non affidarsi interamente all'andamento di una macchina così delicata, ne fa d'uopo di tanto in tanto assicurarci coi mezzi astronomici se il suo andamento mantien costante ed invariabile; ma de' calcoli a ciò relativi parleremo a luogo meglio opportuno.

LEZIONE XXXIX.

Della luna e sue fasi.

442. La vicinanza del nostro satellite, la sua influenza sulle mar[ee] la cui conoscenza è indispensabile all'uomo di mare, ne impone dovere di esaminare attentamente i suoi movimenti, assai variabili se stessi, e che vieppiù ci si rendono significanti per la sua g[ran] vicinanza.

Le differenti posizioni della luna riguardo al sole ed alla terra s[ono] le cause principali delle disuguaglianze reali ed apparenti de' suoi

vimenti, di modochè sino agli ultimi tempi sono riusciti vani gli sforzi de' più valenti astronomi, per completarne la teorica.

Felicemente però, pel progresso delle scienze e della navigazione in particolare, l'analisi diretta all'uopo dal sublime autore della meccanica celeste, secondata dagli sforzi de' componenti del *bureau* di longitudine di Parigi, han sormontato tutti gli ostacoli, e portata la teorica de' movimenti del sole e del nostro satellite a tal grado di perfezione che niente vi è ormai a desiderare.

Il volere qui sviluppare per esteso questa teorica sì difficile e complicata, oltre di essere ardua impresa, sarebbe superflua al nostro bisogno. Esamineremo dunque solo i suoi movimenti e le sue fasi: indi la sua influenza sulle maree.

443. Mentre sembra avere la luna il movimento comune a tutti gli astri del nostro sistema planetario da oriente in occidente, essa ha il suo moto proprio nel medesimo senso degli altri pianeti, cioè da occidente in oriente per 13° 10′ 35″ circa in ogni giorno; ed è assai facile avvertire questo celere movimento se per poco in una bella notte vediamo la luna nelle vicinanze di una stella qualunque: scorso qualche tempo osserveremo che se ne discosta dalla parte di levante.

Di giorno in giorno la sua distanza angolare si aumenterà, e giunta alla distanza di 180° si approssimerà di bel nuovo alla stella dalla parte di ponente finchè tornerà al punto di partenza in 27 giorni, 7 ore, 43 minuti e 11,5 secondi: tal giro vien detto *rivoluzione siderea*. E quando nella rivoluzione siderea vuolsi solamente contemplare il ritorno della luna alla medesima longitudine, bisognerà aggiungere la considerazione della precessione degli equinozî rispetto alla terra, che durante una rivoluzione siderea è di 6″,8; per la qual cosa si avrà un periodo di $27^{g}\ 7^{h}\ 43'\ 04'',7$ che distinguesi col nome di *rivoluzione tropica* o *periodica*.

444. Se poi consideriamo il moto proprio della luna relativamente al sole troveremo che essa dovrà impiegare circa due giorni di più per raggiungerlo, poichè questo in virtù del suo moto proprio si avanza egualmente verso l'oriente di 59′ 8″ per giorno in quantità media; e quindi

rispetto al sole compirà la sua rivoluzione nello spazio di giorni 29 12^h 44′ 03″ la quale dicesi *sinodica, mese sinodico o lunazione.*

445. Il moto periodico della luna più che quello degli altri pianeti va soggetto ad ineguaglianze molto sensibili. Partendo dall'apogeo la sua velocità va successivamente aumentando, a motivo della figura ellittica della sua orbita sino al perigeo punto il più vicino alla terra, d'onde comincia nuovamente a diminuire finchè sarà di ritorno all'apogeo (46). La luna dunque aumenta di velocità e di diametro apparente a misura che si avvicina alla terra; e però la grandezza del suo diametro e la sua velocità dipendono dalla sua maggiore o minore vicinanza al perigeo termine principale delle disuguaglianze de' suoi movimenti, ragion per la quale questo arco di distanza vien detto *anomalia* ed il tempo che impiega per ritornare al suo perigeo, *rivoluzione anomalistica.*

Questa benchè non sia sempre la stessa, variando continuamente l'apogeo ed il perigeo pure in quantità media vien fissata a giorni 27 13^h 18′ 37″.

446. Infine nello spazio di giorni 27 5^h 5′ 36″ la luna sarà ritornata al nodo della sua orbita coll'ecclittica, dal quale si potrà supporre partita, periodo che prende il nome di *rivoluzione dragontea*: il nodo pel quale si eleva al nord si chiama ascendente e vien dinotato dal segno ☊, e l'altro discendente ☋.

447. Sicchè riepilogando, per maggior chiarezza quanto sinora si è esposto diremo:

La *rivoluzione siderea* riconduce la luna alla medesima stella;

La *rivoluzione tropica* o *periodica* riproduce la medesima longitudine;

La *rivoluzione sinodica* fa ritornare la luna in congiunzione col sole, e riproduce le fasi lunari;

La *rivoluzione anomalistica* determina il ritorno della luna al perigeo;

La *rivoluzione dragontea* restituisce la luna al suo nodo ☊.

Le durate di tali rivoluzioni, prendendo per unità il giorno medio solare, sono le seguenti:

siderea	$= 27^{g}\ 07^{h}\ 43'\ 11'',5$	$= 27^{g},32166142 3$
tropica	$= 27\ 07\ 43\ 04\ ,7$	$= 27\ ,321582418$
sinodica	$= 29\ 12\ 44\ 02\ ,87$	$= 29\ ,530588541 6$
anomalistica . .	$= 27\ 13\ 18\ 37\ ,4$	$= 27\ ,5545995$
dragontea . . .	$= 27\ 05\ 05\ 36$	$= 27\ ,2122222$

siderea del perigeo	$3232^{g},575343$
tropica del perigeo	$2231\ ,47 51$
siderea del nodo ☊	$6798\ ,279$
tropica del nodo ☊	$6788\ ,50982$
sinodica del nodo ☊	$346\ ,619851$

Il nodo retrograda sull'eclittica di $0°3'\ 10'',64$ in ogni giorno medio
di $1\ 33\ 57\ ,6$ in ogni rivoluzione sinodica.

Il movimento della luna relativamente al sole è di $12°\ 11'\ 26,7 = 12°,19075$, per cui essa ritornerà al meridiano, in quantità media, dopo $24^{h}\ 50'\ 28'',3287$ di tempo medio; e quindi in 59 giorni passerà solo 57 volte per un dato meridiano. I giorni ne' quali si verifica che la luna non passa per lo meridiano di Parigi sono contraddistinti nella *Connaissance des temps* con una lineetta nera, come in seguito diremo.

Notiamo infine che il movimento medio della luna si accelera di continuo, ed in ogni secolo percorre $9''$ di più che nel secolo precedente; per la qual cosa ogni mese sinodico diminuisce di $0''0000212766$. Da questa accelerazione dipende *l'equazione* o *ineguaglianza secolare*.

448. *Delle fasi.* Le differenti epoche della rivoluzione sinodica danno origine alle fasi della luna, cioè a dire a' diversi aspetti sotto i quali si presenta agli occhi dell'osservatore durante il corso di una lunazione.

In fatti sieno il sole e la luna in congiunzione, è chiaro che in questa guisa il nostro satellite non presentandoci che l'emisfero opposto all'illuminato, cioè il suo emisfero oscuro, essa ci sarà invisibile, e per tal posizione convien che sorga, passi al meridiano, e tramonti contemporaneamente al sole: questa fase dicesi *novilunio* o *neomenia*.

Essendo però la luna più celere del sole nel suo moto verso l'oriente, poichè percorre 13° 11' circa per giorno, mentre il sole si avanza solo di 59' 8"; ne segue che la luna lo avanza di circa 12° al giorno, ed a capo di circa giorni 7 $\frac{1}{2}$ saranno i due astri ad angolo retto; e noi potremo vedere della luna la metà dell'emisfero illuminato: questa seconda fase dicesi *primo quarto*. Così continuando la luna il corso della sua orbita dopo altri giorni 7 $\frac{1}{2}$ si troverà in opposizione col sole, e noi vedremo l'intiero emisfero illuminato la quale fase dicesi *plenilunio*: in tale caso essa comparirà sull'orizzonte presso a poco al tramonto del sole. E finalmente allorquando sarà in posizione opposta al primo quarto dicesi *ultimo quarto* (63).

Le fasi novilunio e plenilunio chiamansi *sizigie*, e *quadrature* il primo ed ultimo quarto.

449. E qui ne fa mestieri avvertire che se l'orbita della luna fosse nel piano dell'eclittica dovrebbero esservi eclissi di sole in tutte le congiunzioni, ed eclissi di luna in tutte le opposizioni; essendo però quella della luna inclinata di 5° circa alla eclittica, i raggi del sole pervengono alla terra nelle congiunzioni passando di sopra o di sotto della luna, e questa medesima inclinazione permette che nelle opposizioni i raggi solari passino al disopra, o al disotto della terra. Se però le sizigie accadono nei nodi o nelle vicinanze di essi, avendo luogo l'interruzione de' raggi solari in tutto o in parte, vi sarà eclisse totale nel primo caso, e parziale nell'altro, secondochè il cono d'ombra della terra o della luna più o meno asconde il sole alla luna o alla terra (70 a 75).

450. Or se si moltiplica per 12 la durata d'una lunazione noi vedremo, che questo periodo di tempo impropriamente detto *anno lunare* differisce dall'*anno solare* di giorni 10,875, quindi le posizioni della luna relativamente alla terra differiscono da un anno all'altro; ma accumulando queste differenze che producono sempre nuove lunazioni esse finiscono dopo il periodo di 19 anni, infatti moltiplicando 235 pei giorni di una lunazione si avrà pochissima differenza coi giorni contenuti da 19 anni solari. Questa scoverta di Metone ateniese fu premiata in una

olimpiade, e scritta in caratteri d'oro nella piazza d'Atene; e quindi fu detto *numero d'oro* il numero d'ordine che occupa ciascun anno nel ciclo; e siccome al cominciamento dell'era cristiana contavasi un anno del ciclo, così per avere il numero d'oro di un dato anno bisogna aggiungere un'unità all'anno proposto, indi dividere per 19, ed il residuo sarà il numero d'oro cercato, mentre il quozienle additerà il numero de' cicli decorsi dalla nascita del Redentore sino a noi.

451. Dicesi *epatta* l'età che trovasi avere la luna al finire dell'anno precedente; ed essendo l'epatta della luna al termine del secondo anno d'un ciclo lunare di giorni 11, di 22 al terzo, di 33 al quarto, ovvero di una lunazione e giorni tre; così per ottenere l'epatta di un dato anno bisognerà togliere un'unità dal numero d'oro; moltiplicare questa grandezza per 11 indi dividere per 30; e il residuo ne darà l'epatta. E dicesi *età della luna* il numero dei giorni scorsi dal novilunio fino al giorno proposto.

452. Essendo la somma di due lunazioni eguale a circa 59 giorni, cioè a giorni $60 - 1$; ed essendo la somma di due mesi per lo più eguale a giorni $61 = 60 + 1$; siegue che se ogni lunazione conteremo per giorni 30, e similmente per giorni 30 ogni mese, potremo avvalerci della seguente regola pratica, ma semplicissima, per conoscere l'età della luna in un giorno qualunque dell'anno.

Si addizioni l'epatta dell'anno, il numero de' mesi da marzo inclusivo sino a tutto il mese corrente, e la data del mese. Se la somma sarà minore di 30 sarà essa l'età della luna nel giorno proposto; e quando ne fosse maggiore bisognerà toglierne una lunazione, cioè 30 giorni, ed il residuo rappresenterà la richiesta età della luna.

Esempio 1.°

Si domanda l'età della luna il 1.° novembre 1840

Epatta per l'anno 1840	26
Mesi da marzo a novembre. . . .	9
Data	1
Somma	36
Età della luna a 1.° novembre	6

Esempio 2.°

Si domanda l'età della luna il dì 14 gennaro 1840	
Epatta dell'anno 1839.	15
Mesi da marzo a gennaro	11
Data	14
Somma	40
Età della luna a 14 gennaro.	10

Conosciuta l'età della luna sarà facilissimo pervenire alla conoscenza di ciascuna delle fasi precedente e seguente: Così ne' casi precedenti si conchiuderà che a 2 novembre accadde il *primo quarto*, e a 25 ottobre la *neomenia*; e che a 12 gennaro fu *primo quarto* e a' 19 *plenilunio*.

453. In questa specie di computo, essendo le quantità tutte inesatte, non potrà mai ottenersi alcuna specie di precisione, anche fosse una sufficiente approssimazione; non dovrà adunque farsene uso che solamente in difetto di altri metodi.

454. Avvertiamo intanto che il metodo per trovare l'epatta di un dato anno (451) non può rimanere inalterato con lo scorrere de' secoli.

In fatti l'anno tropico $365^g,2422418981 \times 19 =$	$6939^g,6025560639$
mese sinodico $29,5305885722 \times 235 =$	$6939,6883144670$
La luna resta in ritardo alla fine del ciclo per . . .	$0,0857584031$
Durata del secolo in espressione di cicli	$\times 5\frac{5}{19}$
Ritardo della luna in un secolo.	$0,4513597452628$
	$\times 25$
Ritardo in 25 secoli.	$11,28399363157$

Sicchè in 25 secoli la luna dovrebbe essere in ritardo di più di 11 giorni sui moti del sole; ma in tal periodo di 25 secoli ci troveremo aver tolto dal computo de' movimenti del sole giorni 19 per gli anni secolari fatti comuni in vece che bisestili, adunque avremo tolto dal computo solare giorni 8 di più di quanto abbisognava per agguagliare i moti del sole e della luna. Volendo quindi conseguire lo scopo di agguagliarli, dovremo togliere in 25 secoli direttamente dal computo lunare questi 8 giorni. Epperò nella proposta per la riforma gregoriana fu stabilito, dopo agguagliata l'epatta al 1600, che in ogni tre secoli si diminuisse dall'epatta lunare un giorno, e ciò per sette volte

di seguito, ed alla ottava volta si fosse esteso il periodo a quattro secoli: e così di seguito. Laonde la prima diminuzione di un giorno dall'epatta calcolata (451) dovrà eseguirsi dal 1900 al 2200, e l'ultima deduzione dal 4000 al 4400; per poi cominciar nuovamente a calcolar l'epatta senza farvi detrazione alcuna, come dal 1600 fino al 1900 si è, e si sta praticando.

455. Da queste considerazioni facilmente si ricava un altro metodo per trovare le fasi della luna; ma calcolando su' suoi moti medî, mancherebbero sempre le correzioni relative a tutte le ineguaglianze che le appartengono.

Si stabilisca la tavola XXIV indicante a termine medio l'epatta degli anni, calcolando prima l'epatta di un anno qualunque, indi aggiungendo ad ogni anno seguente l'epatta media $10^{g},875179023$ $= 10^{g}\ 21^{h}\ 00'\ 15'',46839072$, cioè

Long ☽ a mezzanotte 31 dicembre 1840 t. m.		10°	$59'$	$14'',9$
Long ☉ a mezzanotte 31 dicembre 1840 t. m.	—	280	28	32 ,8
Differenza delle long ☽ e ☉		90	30	42 ,1

Essendo il movimento *medio relativo* della luna rispetto al sole per ogni giorno di $12^{\circ}\ 11'\ 26'',7 = 12^{\circ},19075$, sarà il movimento orario di $0^{\circ},50795 = 0^{\circ}\ 30'\ 28'',62$,

quindi avremo	per 90° . . .			7^{g}	9^{h}	11		(quarta parte della lunazione)
	per	0	$30'$.	0	0	15	14,31	
	per	0	00 $42''$	0	0	00	21,33	
	per 90	30	42 =	7	9	26	35,64	

epatta pel 1841 =	7^{g}	9^{h}	$27'$
	10	21	00
pel 1842 =	18	6	27
	10	21	00
pel 1843	29	03	27
	10	21	00
	40	00	27
—	29	12	44
pel 1844 =	10	11	43
ec.	ec.	ec.	

Si costruisca similmente la tavola XXV per avere l'*epatta mensuale*. Cioè si supponga aver la luna zero epatta al cominciar dell' anno civile, scorsi 31 giorni del mese di gennaro, la luna avrebbe di epatta al cominciar di febbraro 31 — $29^g\,12^h\,44' = 1^g\,11^h\,16'$, al cominciar di marzo $29^g\,11^h\,16'$, e così di seguito.

Quindi aggiungendo all' epatta dell' anno quella del mese, si avrà l'età della luna al cominciar del mese corrente; per la qual cosa sarà facile dedurre tutte le fasi del mese proposto, solo che si abbia presente l' età che aver deve la luna in ciascuna di esse; cioè al novilunio zero, o pure $29^g\,12^h\,44'$; al primo quarto $7^g\,9^h\,11'$; al plenilunio $14^g\,18^h\,22'$; all' ultimo quarto $22^g\,3^h\,33'$.

Esempio.

Si chieggano le fasi della luna per ottobre 1841.

epatta pel 1841 . . .	7^g	9^h	$27'$
per ottobre . .	7	5	24
	14	14	51

Sicchè la fase prossima futura è il plenilunio, poichè questo richiede $14^g\,18^h\,22'$ di età: adunque età della luna a 1.° ottobre

	14	14	51	
	14	18	22	
⊕	0	03	31	*mattina*
	7	09	11	
☾	7	12	42	= $7^g\,00^h\,42'$ *sera*
	7	09	11	
●	14	21	53	= 14 09 53 *sera*
	7	09	11	
☽	22	07	04	*mattina*
	7	09	11	
⊕	29	16	15	= 29 04 15 *sera*

Le fasi così calcolate contengono più ore di errore quasi sempre; e quindi non bisogna avvalersi di questo metodo nè dell' altro (452) quando voglia conseguirsi la precisione. Questi due metodi però, a malgrado della loro inesattezza, sono sufficienti per l' uso al quale serve nella navigazione la conoscenza della fase, cioè a poter calcolare l' ora dell'alta marea in un dato porto; e perciò in mancanza di effemeridi potranno all' uopo essere adoperati.

456. Nel caso regolare si hanno le effemeridi, come per esempio la *Connaissance des temps*, si potranno avere le fasi con precisione mediante la sola differenza di longitudine per un meridiano qualunque.

Esempio.

Si vogliano le fasi della luna pel meso di novembre 1840 in Napoli.

☽ Ora della fase a Parigi t. m.	2^g	1^h	$13'$		
Tempo medio a mezzodì vero		11	43	42,73	
Ora della fase a Parigi t. v.	2	1	29	17,27	
Diff. di longitudine in tempo			47	41 Est	
Epoca della fase per Napoli.	2	2	16	56,27	= il giorno 2 a 2^h $17'$ sera
○ Ora della fase a Parigi t. m.	9^g	6^h	$01'$		
Tempo medio a mezzodì vero		11	44	01,05	
Ora della fase a Parigi t. v.	9	6	16	58,95	
Diff. di longitudine in tempo			47	41 Est	
Epoca della fase per Napoli.	9	7	04	39,95	= il giorno 9 a 7^h $05'$ sera
☾ Ora della fase a Parigi t. m.	15^g	21^h	$03'$		
Tempo medio a mezzodì vero		11	44	49,54	
Ora della fase a Parigi t. v.	15	21	18	10,46	
Diff. di longitudine in tempo			47	41 Est	
Epoca della fase in Napoli .	15	22	05	51,46	= il giorno 16 a 10^h $06'$ mattina
● Ora della fase a Parigi t. m.	23^g	14^h	$21'$		
Tempo medio a mezzodì vero		11	46	41,90	
Ora della fase a Parigi t. m.	23	14	34	18,10	
Diff. di longitudine in tempo			47	41 Est	
Epoca della fase in Napoli .	23	15	21	59,10	= il giorno 24 a 3^h $22'$ mattina

Causa delle principali ineguaglianze della luna nella sua orbita.

457. Se la forza centrale che fa girare la luna intorno della terra non fosse modificata da nessuna altra forza, la luna seguirebbe, riguardo alla terra le stesse leggi che i pianeti seguono riguardo al sole; cioè descriverebbe una ellisse regolare ed immobile al cui fuoco è situata la terra: ma mentre la luna gira intorno alla terra, questa la trasporta seco intorno al sole; e però la luna è attratta nello stesso tempo dall'una e dall'altro. Da questa doppia attrazione derivano tutte le variazioni che si osservano ne' suoi movimenti.

458. Nelle congiunzioni essendo il sole più vicino alla luna che alla terra avrà maggiore azione sulla prima che non sulla seconda, essendochè l'attrazione è nella ragione inversa de' quadrati delle distanze. E per la stessa ragione inversamente applicata, nelle opposizioni, la terra essendo attratta dal sole più che la luna, dovrà questa rimanere indietro. Quindi in entrambi i casi l'azione del sole tende ad allontanare la luna dalla terra; e dobbiamo conchiudere che nelle sizigie la gravitazione della luna verso la terra è diminuita dall'azione del sole.

459. Nelle quadrature per contrario, essa aumenta, perocchè trovandosi la luna in Q (*fig.* 72) è attirata obliquamente dal sole, e perciò tal forza si decomporrà nelle due: l'una secoudo il raggio QT dell'orbita lunare, quindi proporzionale allo stesso raggio QT; l'altra parallela a TS, ed a tale distanza essa non contribuirà che a ricurvare il movimento proiettile della luna nella sua orbita, onde segua la terra nella sua traslazione. Quindi è d'uopo conchiudere che nelle quadrature l'aumento della gravità della luna verso la terra sta a quella della terra verso il sole come la distanza media r della luna alla terra, alla distanza media R della terra al sole, cioè come $r : R$.

460. Poniamo $g=$ alla forza centripeta di un corpo che gira intorno di un altro, $r=$ raggio del cerchio percorso, e $v^2=$ alla sua velocità: Avremo $g=\frac{v^2}{r}$; di più la velocità di un corpo libero nella sua caduta ci dà $v=\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$. Ma se gli spazî percorsi sono periferie di cerchio, essi sono proporzionali ai raggi; e quindi potremo prendere il raggio in vece dello spazio percorso, e l'equazione $v=\frac{s}{t}$ si cambierà in quella $v=\frac{r}{t}$ e però $v^2=\frac{r^2}{t^2}$.

E sostituendo questo valore di v^2 nella prima equazione avremo

$g=\frac{r^2}{r\times t^2}=\frac{r}{t^2}$.

Laonde la gravità della luna verso la terra, sta a quella della terra

verso il sole come $\frac{r}{t^2} : \frac{R}{T^2}$ cioè nella diretta delle distanze e nella inversa dei quadrati de' tempi.

Sicchè chiamando a l'aumento della gravità della luna nelle quadrature; G, g le gravità della terra e della luna rispettivamente verso il sole e verso la terra, e mettendo in proporzione i due principî esposti, abbiamo

$a : G :: r : R$ (459).

$G : g :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ (460), $G = \frac{g \times R \times t^2}{T^2 \times r}$, e però

$a : \frac{g \times R \times t^2}{T^2 \times r} :: r : R$, e quindi $a = \frac{g \times R \times t^2 \times r}{T^2 \times r \times R} = \frac{g \times t^2}{T^2}$, o sia

$a : g :: t^2 : T^2$.

Sicchè il rapporto dell'aumento della gravità della luna nelle quadrature sia alla gravità naturale di essa come $t^2 : T^2$.

461. Ma la rivoluzione periodica della terra è 365° 6h 9′ 14″, e quella della luna è di giorni 27 7h 43′ 4″, i cui quadrati sono tra loro come 178 : 1. Dunque nelle quadrature la gravità della luna aumenta verso la terra, attesa l'azione del sole, per $\frac{1}{178}$ della sua gravità naturale.

462. Nelle sizigie la diminuzione della gravità della luna è uguale alla differenza de' quadrati della distanza della terra dal centro del sole e della distanza della luna sizigia dal medesimo centro del sole; ma la differenza di questi quadrati è presso a poco eguale al diametro NP′ dell'orbita lunare che passa per le sizigie; essendo inassegnabile il raggio dell'orbita lunare rispetto alla gran distanza in cui è la terra dal sole. Dunque nelle sizigie la diminuzione della gravità della luna verso la terra è eguale al diametro della sua orbita, ed in conseguenza è doppia di ciò che aumenta nelle quadrature, è però di $\frac{1}{89}$.

463. Or supponiamo la luna in O, a 45° di distanza dalle sizigie e dalle quadrature; e sia nel passare dalla congiunzione al primo quarto. Trovandosi in questo caso più vicina al sole di quanto lo sia la terra,

verrà attirata obliquamente dal sole ma con più forza che non la terra: e questa forza obliqua si decomporrà in due, in BS parallela ed uguale alla linea che passa pe' centri del sole e della terra, ed in OB ch'è obliqua al raggio menato dal centro della luna a quello della terra. Questa seconda forza obliqua al raggio OT ch' esprime la direzione della gravità della luna verso la terra, ancora si decompone in due; l'una BD perpendicolare al raggio della orbita lunare, e l'altra DO, presa nel prolungamento del raggio medesimo. L'effetto della prima sarà di ritardare il movimento della luna, durante il suo passaggio dalla congiunzione al primo quarto; e di accelerarlo dall' ultimo quarto alla neomenia.

La seconda forza DO tirando la luna nel senso del prolungamento del raggio della sua orbita, fa necessariamente diminuire la sua gravità verso la terra: ma in ogni istante successivamente meno che nella congiunzione, in guisa che dovrà esservi un istante ed un punto della sua orbita prima di giungere alla quadratura, nel quale questa diminuzione della totale diminuzione sizigia della gravità della luna verso la terra sarà nulla; e però non si troverà più aumentata dall'azione del sole nè ancora diminuita, come deve avvenire nel continuare ad avvicinarsi alla quadratura.

464. Intanto, poichè la diminuzione nelle sizigie è il doppio dell'aumento nelle quadrature, bisognerà che essa decresca più lungamente nel passare dalla congiunzione al primo quarto, che nel venire dalle quadrature alle sizigie. E se questa forza segnisse la ragione degli archi, dovrebbe divenir nulla a 60° di distanza dalle sizigie; ma siccome in tutte le decomposizioni, le forze seguono la ragione de' seni degli angoli, così essa forza non sarà nulla che a 54° 44′ 8″.

465. Siccome nelle sizigie la forza dell' attrazione del sole fa diminuire la gravità della luna verso la terra del doppio di quanto la fa crescere nelle quadrature (462), così nelle sizigie la chiameremo $2r$, e nelle quadrature $-r$; e se chiamiamo φ tale diminuzione, sarà nelle sizigie $\varphi = \frac{1}{2} r + \frac{3}{2} r = 2r$, e nelle quadrature $\varphi = \frac{1}{2} r - \frac{3}{2} r = -r$.

Allorchè la luna si scosta dalla congiunzione, la NT andrà diminuendo

come i coseni degli angoli di elongazione, che chiameremo a; e quindi avremo per le sizigie $\varphi = \frac{1}{2} r + \frac{3}{2} \cos 2a = 2r$, per le quadrature $\varphi = \frac{1}{2} r - \frac{3}{2} \cos 2a = - r$; e sarà $\varphi = 0$ quando sarà $\frac{1}{2} r = \frac{3}{2} \cos 2a$, o sia quando avremo $\frac{1}{3} r = \cos 2a$. Ma $\frac{1}{3} r = 0{,}3333333$, che è cos $109° \, 28' \, 16'' \, 386$, la cui metà è $54° \, 44' \, 8'' \, 198$; dunque la luna deve arrivare a questa distanza angolare dalla congiunzione, perchè il sole non abbia alcuna influenza di diminuzione o aumento sulla gravità della luna verso la terra.

LEZIONE XL.

Delle maree.

466. Se per l'attrazione universale i corpi celesti turbano gli uni agli altri sensibilmente la situazione ed il moto, è facile concepire che le acque più d'ogni altra sostanza terrestre debbono provare l'effetto delle forze con cui il sole e la luna agiscono sulla terra, talchè un fenomeno tanto strano per gli antichi è divenuto oggidì così naturale che la sua mancanza formerebbe forse un'eccezione a tutte le teoriche finora conosciute.

467. Un osservatore sulle coste d'un gran mare come l'oceano atlantico, vede che appena la luna si alza di pochi gradi sull'orizzonte le acque cominciano il loro *flusso*, ovvero s'alzano a poco a poco formando un ammasso enorme chiamato *alta marea*, che sempre aumenta finchè la luna, lasciando il meridiano, non abbia percorso un dato arco verso ponente, ed allora cominciando il fluido a cedere al proprio peso, va con moto opposto, ovvero con un *riflusso*, a prendere la prima posizione chiamata *bassa marea*.

468. Se per poco immaginiamo esser questa una massa fluida, astrazione facendo dalle perturbazioni de' corpi celesti, avrebbe essa la figura di un vero ellissoide, ma come l'effetto dell'attrazione è in ragione inversa de' quadrati delle distanze, così nelle congiunzioni le parti dell'orbe illuminato più vicine alla linea de' centri della luna e della terra, venendo maggiormente attirate verso il primo di questi corpi cele-

sti che non verso il secondo, si allontaneranno da questo punto per avvicinarsi alla luna: vi è dunque in questo punto alta marea lunare. Ed essendosi per la medesima ragione accostato il centro di gravità della terra verso il sole e la luna, le acque dell'emisfero opposto si avvicineranno anch'esse al prolungamento della linea dei centri, e si avrà pure alta marea lunare.

469. La terra girando sul proprio asse trasporta seco questo sferoide acquoso, il quale seguendo principalmente l'impulso dell'azione della luna, avrà il culmine della sua elevazione presso a poco nel piano del meridiano in cui successivamente si troverà la luna. E quantunque quest'azione della luna, divenendo meno diretta a misura che essa si allontana dalle sizigie, diminuisca; pure la sua presenza contribuisce all'elevazione delle acque fino a che giunga a 54° di distanza dalle sizigie (465). Donde siegue che la maggiore elevazione delle acque, o sia l'alta marea, invece di verificarsi al momento del passaggio della luna al meridiano, dovendo avverarsi quando l'accumulazione delle acque sarà divenuta massima, questo istante dovrà corrispondere a uno di quelli ne' quali la luna trovisi tra il meridiano ed il 54° di distanza da esso.

470. Replicate esperienze su questo fenomeno han fatto conoscere che il ritardo medio di due maree consecutive dello stesso nome è di 50′25″,908, appunto quello che presenta la luna nel passaggio al meridiano; giacchè è vero che dopo 24 ore dall'ultimo passaggio della luna al meridiano, essa non dovrebbe impiegare che 48′ 46″,764 per raggiugnere nuovamente il sole; ma per la stessa ragione che la luna ha ritardato sul sole di 48′ 46″,764 in 24 ore, ritarderà di 1′ 39″,144 in 48′ 46″,764.

Questo ritardo medio di due maree soffre dei cangiamenti analoghi a quelli della luna nel passaggio al meridiano, e quest'armonia della quantità fa conoscere chiaramente che la luna in virtù della sua attrazione influisce essenzialmente sulla massa d'acqua che copre il nostro globo.

471. Quantunque però la forza attrattiva della luna influisca essenzialmente sulla massa fluida che è sulla terra, attesa la sua gran vici-

nanza, pure vien combinata con quella del sole che ne aumenta o ne diminuisce la quantità, secondo le diverse posizioni in cui trovasi colla luna, ed allorquando evvi concorso delle seguenti circostanze le maree si aumentano:

1.° Allorchè le sizigie han luogo al perigeo della luna, ed anche vieppiù, allorchè esse avvengono nei nodi; giacchè in tal caso agendo le due forze nella stessa direzione, il risultamento sarà la somma delle maree parziali. E però negli eclissi di sole e di luna saranno le maree più grandi che nelle sizigie semplici.

2.° Allorchè le sizigie han luogo essendo la luna al perigeo, e trovasi il sole egualmente al suo perigeo; poichè in tal caso la maggior vicinanza aumenta l'attrazione.

3.° Finalmente allorchè le sizigie han luogo negli equinozî, dappoichè vi è maggiore elevazione sull'equatore.

Al contrario le maree diminuiscono nelle quadrature, ed in maggior quantità:

1.° Allorquando la luna trovasi al suo apogeo ed il sole al perigeo nel momento d'una quadratura; perocchè allora l'influenza della luna è minima ed è contrariata da quella del sole ch'è al suo massimo.

2.° Allorchè al momento d'una quadratura il sole trovasi all'equatore e la declinazione della luna sia molto grande; giacchè in tal situazione la luna eserciterà poca influenza, mentre il sole ne eserciterà una relativamente maggiore.

3.° Infine quando nel momento d'una quadratura la luna trovasi all'eclittica, nel qual caso la piccola marea lunare coincide colla più piccola marea solare.

472. Da un gran numero di osservazioni fatte a Brest con la massima esattezza, si è trovato che nelle diverse circostanze più favorevoli l'alta marea era di metri 5,888, mentre nella più sfavorevole era di 2,789 cioè la prima più del doppio della seconda: prendendo questa ultima per unità, chiamando S l'influenza solare ed L la lunare, avremo $L + S = 2$, $L - S = 1$, quindi $2L = 3$ e $2S = 1$, e dividendo la seconda equazione per la prima sarà $L = 3S$; laonde l'influenza lunare è circa il triplo della solare, e veramente eseguendo questo calcolo a dovere troveremo $L : S :: 2,6 : 1$.

473. Del resto questo fenomeno da' due astri prodotto, avendo luogo sopra un tratto enorme di acqua prende diversi aspetti, e fa che in luoghi vicini si contano differenti ore di alta marea, ed in altri le maree sono più grandi, in altri più piccole, e quà e là abbiano delle varietà di 20 a 50 piedi; e talvolta sino a 100. La situazione de' mari, la posizione degli stretti, il contorno delle coste, l'estensione delle isole e la loro figura, l'ingolfamento de' seni, le correnti che dominano, le comunicazioni esterne ed i venti sono altrettanti motivi che ne moltiplicano indefinitamente la varietà.

474. In conchiusione, da per tutto le acque del mare si elevano e si abbassano due volte nello spazio di 24 ore; e se gli effetti dell'influenza de' due astri sulle maree potessero aver luogo immediatamente, come le cause che li producono, è chiaro che l'alta marea lunare, facendo astrazione un momento dall'influenza del sole, dovrebbe aver luogo all'istante del passaggio della luna al meridiano del luogo; e la bassa marea indi a poco più di 6 ore: o sia il grande asse dello sferoide acquoso sotto l'influenza della luna dovrebbe trovarsi sempre sulla congiungente de' centri della luna e della terra. L'esperienza però diversamente ne convince, avendo continuamente luogo il fenomeno più di due ore dopo del passaggio della luna al meridiano; adunque l'inerzia delle acque è per lo meno la causa principale di questo ritardo. In fatti la più grande alta marea in vece di avvenire nel momento del novilunio o plenilunio accade 36 ore dopo.

475. Ne' giorni del novilunio e del plenilunio, dovendosi trovar la luna sempre in congiunzione o in opposizione col sole, l'alta marea dovrà sempre accadere alla stessa ora del giorno, quindi si è dato a questa ora il nome di *stabilimento del porto* (Tav. XXVI). Essa dinota presso a poco il ritardo dell'alta marea sull'ora del passaggio della luna al semimeridiano superiore od inferiore ne' giorni delle sizigie, ne' quali vi passa verso mezzodì o verso mezzanotte.

476. Siegue da ciò, che essendo l'ora del passaggio della luna al meridiano il giorno dopo le sizigie, presso a poco eguale al ritardo

medio 50′ 26″ (447); ed in generale l'ora del passaggio della luna al meridiano, in quantità media, eguale a 50′ 26″ moltiplicato pel numero de' giorni scorsi dal novilunio o dal plenilunio; così il ritardo della marea da un giorno all'altro sarà presso a poco eguale al ritardo corrispondente del passaggio della luna al meridiano. Quindi l'ora dell'alta marea per un giorno qualunque è quasi eguale all'ora dell'alta marea ne' giorni delle sizigie, o sia allo stabilimento del porto (475), più la somma de' ritardi de' passaggi dal giorno di una delle sizigie; o sia, più il ritardo totale del passaggio della luna al meridiano nel giorno proposto, rispetto a quello avvenuto nelle sizigie.

477. L'ora così trovata sarebbe precisamente l'ora richiesta, se le maree seguissero esclusivamente i moti della luna, ma in pari tempo il sole non cessa di esercitare la sua influenza (471), la quale si combina con quella della luna, secondo la diversa distanza angolare dei due astri; e inoltre l'azione della luna dipende dalla distanza in cui essa trovasi dal perigeo. In conseguenza, per ottenere l'ora dell'alta marea con più esattezza, bisognerà applicare all'ora trovata (476) una correzione dipendente dalla distanza angolare della luna dal sole, e dalla sua distanza vera dalla terra.

Ma l'ora del passaggio della luna al meridiano è funzione della distanza angolare in cui trovasi la luna dal sole, e la parallasse è funzione della distanza della luna dalla terra; dunque ci serviremo all'uopo di questi due elementi; pe' quali si ha il vantaggio di trovarli nella *C. T.* il primo ogni giorno, e l'altro ogni 12 ore. E poichè il ritardo di una marea alla simile del giorno seguente è alle volte maggiore alle volte minore del ritardo corrispondente de' due passaggi della luna al meridiano, la correzione potrà essere positiva o negativa.

478. Quindi per maggior semplicità, nella tavola XXVII, in vece di dare la correzione additiva o sottrattiva al ritardo del passaggio della luna al meridiano per ottenere il ritardo corrispondente della marea, si è notato direttamente il ritardo della marea secondo il diverso ritardo del passaggio della luna al meridiano: cioè, per formare la tavola si sono eseguite tutte le addizioni o sottrazioni che i diversi casi esigeva-

no. In guisachè il calcolo per trovar l'ora dell'alta marea di un porto sarà semplicissimo :

1.° Con la differenza di longitudine si deduca dall'ora del passaggio della luna al meridiano di Parigi (*C. T.*), l'ora del suo passaggio pel meridiano del luogo, nel giorno proposto ; e per quest'ora si calcoli la parallasse orizzontale equatoriale della luna, potendo trascurarsi la sua correzione relativamente alla latitudine.

2.° Con l'ora del passaggio della luna al meridiano del luogo, e con la parallasse orizzontale si troverà nella tavola XXVII, l'ora del ritardo della marea. Questa aggiunta all'ora dello stabilimento del porto, darà l'ora astronomica dell'alta marea. Per la qual cosa se la somma sorpassa 12 ore, l'eccesso dinoterà l'ora dell'alta marea della mattina del giorno seguente ; e per aver quella della sera del giorno corrente, bisognerà togliere 12h 25' dall'ora astronomica trovata ; o più esattamente 12 ore, più la metà del ritardo diurno del passaggio della luna al meridiano.

Esempi.

Qual'è l'ora dell'alta marea a Brest il dì 25 marzo 1836?	
Passaggio ☽ a Brest (C. T.). .	6h 31'
Parallasse orizzontale ☽	54',4
Per 6h 31' e 54'4 (tav. XXVII)	5h 33',3
Stabilim. del porto (tav. XXVI)	3 48
Alta marea il 25 marzo . .	9 21 ,3

Qual'è l'ora dell'alta marea a Bordeaux il dì 1 gennaio 1838?	
Passaggio ☽ a Bordeaux. . .	4h 44'
Parallasse orizzontale	59',5
Per 4h 44' e 59,5.	3h 35',5
Stabilimento del porto . . .	6 54
Alta marea a 1 gennaio. . .	10 29 ,5

Qual'è l'ora dell'alta marea a Cherbourg il dì 27 marzo 1836?	
Passaggio ☽ a Cherbourg . .	8h 13'
Parallasse orizzontale ☽ . . .	55',2
Per 8h 13' e 55',2	8h 26',4
Stabilimento del porto . . .	7 45
Alta marea il 27 marzo. . .	16 11 ,4
	—12 25
Alta marea la sera del 27 marzo	3 46 ,4

Qual'è l'ora dell'alta marea a Dunkerque il dì 23 gennaio 1838?	
Passaggio ☽ a Dunkerque . .	22h 38'
Parallasse orizzontale ☽ . . .	60',1
Per 22h 38' e 60',1	10h 51 ,2
Stabilimento del porto . . .	11 45
Alta marea a 23 gennaio . .	22 36 ,2
	—12 32
Alta marea la sera del 23 gennaio	10 04 ,2

LEZIONE XLI.

Del maneggio della Connaissance des temps.

479. La *Connaissance des temps* è un volume che il *Bureau des longitudes* di Parigi pubblica ogni anno, con anni tre di anticipazione. Contenendo esso, fra le altre cose, tutti gli elementi necessarî ai calcoli di astronomia nautica, n'è mestieri trattenerci su'modi di scernerli e determinarli secondo le diverse circostanze che ne si offrono; cioè, come guidarne, perchè un elemento dato in tal volume per una epoca a Parigi, sia convenevolmente ridotto ad altra epoca ed altro luogo.

Per conseguir questo scopo dobbiamo necessariamente cadere in alcune ripetizioni, pei varii principî teoretici ch'è stato indispensabile accennare con anticipazione, e che qui stimiamo convenevolmente ripetere, onde non arrecar difetto al presente proposito.

480. In generale bisogna convincersi, prima di ogni altra cosa, uno esser l'istante in cui avviene un dato fenomeno celeste, e solo esser diverse le ore che in quello istante sotto i diversi meridiani si contano; per la qual cosa, calcolata che si sarà l'ora che nell'istante del fenomeno si conta a Parigi, si potrà sempre dedurre mercè la differenza di longitudine, a qual ora il fenomeno stesso dovrà avverarsi per un altro meridiano qualunque; e viceversa, quando nota l'ora del fenomeno a Parigi, e calcolata l'ora in cui è avvenuto sotto un altro meridiano, voglia dedursi la longitudine del luogo dell'osservazione.

481. Nella maggior parte de' casi ordinarî dell' astronomia nautica le semplici parti proporzionali sono sufficienti a dedurre l'elemento di calcolo per un istante qualunque corrispondente ad una parte dell'intervallo fra due epoche consecutive della *C. T.* per le quali in essa l'elemento è somministrato. Ma ciò suppone negli astri un moto equabile, o almeno tale da potersi considerare equabile durante l'intervallo delle dette due epoche consecutive.

Intanto, siccome la longitudine, l'ascensione retta ec. della luna hanno variazioni molto considerabili pure ne' corti intervalli, per le grandi irregolarità cui vanno soggetti i suoi movimenti, non si otten-

gono tali elementi, con l'ordinario metodo delle parti proporzionali, che per approssimazione, insufficiente ne' calcoli che richiedessero grande esattezza; laonde in parecchi casi n'è mestieri ricorrere al metodo delle interpolazioni.

482. *Delle interpolazioni in generale*. Consiste questo metodo nel rinvenire de' termini intermedî in una serie di quantità disposte ad intervalli eguali od ineguali, secondo una legge qualunque. Siccome però gli elementi somministrati dalla *C. T.* vi si trovano notati sempre ad intervalli eguali, così sarà sufficiente occuparci alquanto di questo solo caso.

Sieno a, b, c, d, e, ec.
più quantità disposte tutte tra loro all'intervallo m; y il termine generale della cui ricerca dobbiamo occuparci, ed x la distanza di y dal primo termine della serie.

Se $x = 0$, avremo $y = a$, e la serie avrà un sol termine
$x = m$ . . . . $y = b$ . . . . . avrà due termini
$x = 2m$ . . . $y = c$ . . . . . avrà tre termini
$x = 3m$ . . . $y = d$ . . . . . avrà quattro termini
$x = 4m$ . . . $y = e$ . . . . . avrà cinque termini
ec. ec. ec.

Or se $y = a$, quando $x = 0$, bisognerà che tutti i termini della progressione contengano il valore di a, e quindi chiamando A, B, C, D, E, ec. de' coefficienti da determinarsi, i termini della serie si cangeranno come segue:

$$a = A$$

$$b = A + mB \; . \; . \; . \; . \; . \text{ e quindi } B = \frac{b - A}{m} = \frac{b - a}{m}$$

$$c = A + 2mB + 2m^2C \; . \; . \; . \; . \; . \; C = \frac{c - A - 2mB}{2m^2} = \frac{c - 2b + a}{m \cdot 2m}$$

$$d = A + 3mB + 6m^2C + 6m^3D, \; D = \frac{d - 3c + 3b - a}{m \cdot 2m \cdot 3m}$$

$$e = A + 4mB + 12m^2C + 24m^3D + 24m^4E, \; E = \frac{e - 4d + 6c - 4b + a}{m \cdot 2m \cdot 3m \cdot 4m}$$

ec. ec.

Avendo dunque pe' coefficienti A, B, C, D, E ec., il valore del termine generale y, posto ad una distanza qualunque x dal primo termine a, cioè

$$y = a + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \text{ec. ec.}$$

sostituendo poi i già ricavati valori di tali coefficienti, sarà

$$y = a + \frac{b-a}{m}x + \frac{c-2b+a}{m\,.\,2m}x(x-m) + \frac{d-3c+3b-a}{m\,.\,2m\,.\,3m}x(x-m)(x-2m) + \text{ec.}$$

In dove osservasi che il primo termine è il primo della serie proposta,
il numeratore del secondo termine indica le *differenze prime*,
il numeratore del terzo termine indica le *differenze seconde*,
il numeratore del quarto termine indica le *differenze terze*, ec.

In fatti, facendo le debite sostituzioni si ha

serie	diff. prime	diff. seconde	diff. terze	diff. quarte
a				
	.... $b-a$			
b		... $c-2b+a$		
	.... $c-b$		... $d-3c+3b-a$	
c		... $d-2c+b$		... $e-4d+6c-4b+a$
	.... $d-c$		... $e-3d+3c-b$	
d		... $e-2d+c$		
	.... $e-d$			
e				

E si osservi che volendo calcolare le differenze *prime*, *seconde*, *terze*, ec. dovrannosi prender sempre tanti termini della serie, quanto è il numero d'ordine della differenza proposta, più uno:

Or se le differenze *prime*, *seconde*, *terze*, ec. le quali si hanno direttamente dai termini della serie, facciamo eguali rispettivamente a δ', δ'', δ''', ec. la formola anzidetta diverrà

$$y = a + \frac{x}{m}\delta' + \frac{x(x-m)}{m\,.\,2m}\delta'' + \frac{x(x-m)(x-2m)}{m\,.\,2m\,.\,3m}\delta''' + \text{ec.}$$

Esempio 1.°

Si domanda l'ascensione retta della luna mediante le differenze terze il dì 21 marzo 1840 a 17^h t. m., essendo in longitudine 15° EP.

Ora del luogo	. . . .	17^h	00 00
Diff. long. in tempo	. . . . .	-1	00 00 Est
Ora di Parigi il dì 21 marzo.	.	16	00 00

	AR ☽	diff. 1.ª	diff. 2.ª	diff. 3.ª
21 mezzodì	214° 37′ 16″,5			
		+ 5° 58′ 29″,9		
21 mezzan.	220 35 46 ,4		+ 0° 07′ 32″,9	
		+ 6 06 02 ,8		+ 0° 00′ 20″,4
22 mezzodì	226 41 49 ,2		+ 0 07 53 ,3	
		+ 6 13 56 ,1		
22 mezzan.	232 55 45 ,3			

Laonde per applicare la formola abbiamo

$y = AR$ ☽

$a = 214° 37' 16'',5$

$\delta' = 5\ 58\ 29\ ,9$

$\delta'' = 0\ 07\ 32\ ,9$

$\delta''' = 0\ 00\ 20\ ,4$

$m = 12^h$, e si ponga $= 1$

$x = 16^h = 12^h + 4^h = m + \frac{m}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; e sarà

$$AR ☽ = 214°37'16'',5 + \tfrac{4}{3}(5°58'29'',9) + \frac{\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}}{2}\left(0°\ 07'\ 32'',9\right) + \frac{\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}\times-\frac{2}{3}}{2\,.\,3}\left(0°00'20'',4\right)$$

$$AR ☽ = 214°37'16'',5 + 7°57'59'',8666 + 0°01'40'',6444 + 0°\ 00'\ 01'',0074$$

$$AR ☽ = 222°36'58'',0184$$

Col metodo ordinario delle parti proporzionali si sarebbe avuto

$$AR ☽ = 222°37'47'',3$$

Esempio 2.°

Si domanda la declinazione della luna, mediante le differenze terze il dì 4 marzo 1840 a 17^h t. m. essendo in longitudine 30° EP.

Ora del luogo	17^h	00′	00″
Diff. long. in tempo	−2	00	00 Est
Ora di Parigi il dì 4 marzo . .	15	00	00

	decl. ☽	diff. 1.°	diff. 2.°	diff. 3.°
4 mezzodì	−3° 41′ 59″,2			
		+3° 19′ 19″,4		
4 mezzan.	−0 22 39 ,8		+0° 01′ 50″,1	
		+3 21 09 ,5		−0° 02′ 41″,6
5 mezzodì	+2 58 29 ,7		−0 00 51 ,5	
		+3 20 18 ,0		
5 mezzan.	+6 18 47 ,7			

Per semplicità si notano col segno + le latitudini e le declinazioni boreali, e col segno — le australi:

Sicchè l' espressioni della formola corrisponderanno nel seguente modo

y = decl. ☽

$a = -3°\ 41'\ 59'',2$

$\delta' = +3\ \ 19\ \ 19\ ,4$

$\delta'' = +0\ \ 01\ \ 50\ ,1$

$\delta''' = -0\ \ 02\ \ 41\ ,6$

$m = 12^h$ e si ponga $= 1$

$x = 15^h = 12 + 3 = m + \frac{m}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; avremo

$$\text{decl. ☽} = -3°41'59'',2 + \tfrac{5}{4}(3°19'19'',4) + \frac{\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}}{2}(0°01'50'',1) + \frac{\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times-\frac{3}{4}}{2\,.\,3}(-0°02'41'',6)$$

decl. ☽ $= -3°41'59\ ,2 + 4°09'09'',25 + 0°00'17'',203 + 0°00'06'',312$

decl. ☽ $= +0°27'33'',565$ *Boreale.*

Col metodo ordinario delle parti proporzionali si sarebbe trovato decl. ☽ $= 0°\ 27'\ 37'',575$ *Boreale.*

483. *Delle differenze seconde in particolare*. In mare però quando ancora si chiegga precisione ne' calcoli, si può trasandare di spingere tant'oltre l'esattezza, e basta contentarsi delle differenze seconde. Abbiamo già dimostrato (482) che per le differenze seconde

$$y = a + \delta' \frac{x}{m} + \delta'' \frac{x(x-m)}{2m^2}$$

nel quale valore di y, abbiamo

a noto come primo termine della serie.
δ' . . come differenza prima, che a di più è dato nella *C. T.*
δ'' . . come differenza seconda, che facilmente deducesi.
m . . come intervallo delle tavole, che porremo eguale a 12 ore.
x . . come distanza del termine proposto y dal primo termine della serie a; per la qual cosa l'espressione $\frac{\delta'}{m}x$ dinoterà le parti proporzionali sulla differenza prima corrispondentemente ad y, e che chiameremo p. Sarà quindi

$$y = a + p + \delta'' \frac{x(x-m)}{2m^2}$$

Del terzo termine si è formata la tav. XXVIII, la quale somministra una quantità ch'esprime la correzione per δ'', o sia per le differenze seconde, e che dinoteremo per n: sarà

$$y = a + p + n.$$

484. Vogliasi formare per la tav. XXVIII la colonna relativa a $\delta'' = 12'$, per tutti i valori di x di 10' in 10', considerati $= 1$; avremo in tal caso $m = 72$; e diverrà successivamente l'espressione

$$n = \delta'' \frac{x(x-m)}{2m^2} = 720'' . \frac{1(1-72)}{10368} = 720'' . \frac{1 \times -71}{10368} = 720'' . \frac{-71}{10368}$$

$$x = 20' \left\{ \text{distanza dal primo termine della serie} \right\} = 720'' . \frac{2 \times -70}{10368} = 720 . \frac{-140}{10368}$$

$$x = 30' \ \ldots\ldots\ldots\ldots = 720 . \frac{3 \times -69}{10368} = 720 . \frac{-207}{10368}$$

ec. ec.

Or se dell'espressione $\frac{720}{10368}$ troviamo il logaritmo $\bar{2}.8416375$, questo sarà *costante* per tutti i valori di x nella colonna di $\delta'' = 12'$; e quindi per avere il logaritmo di n basterà aggiungere al logaritmo costante quello del numeratore, cioè del prodotto di due tali fattori, che insieme sommati danno sempre 72, prescindendo dal segno. Questo segno intanto ci fa vedere che alla correzione compete sempre il segno contrario a quello della differenza seconda.

Dunque si voglia trovare il valore di n per $\delta'' = 12'$, e $x = 2^h\ 10'$ = intervalli 13.

$$n = 720'' \times \frac{13 \times -59}{10368} = 720 \times \frac{-767}{10368}$$

$$\begin{aligned} \log 767 &= 2.8847954 \\ \log \textit{costante} &= \bar{2}.8416375 \\ \log n &= 1.7264329 = 53'',2639 \text{ di segno contrario a } \delta''. \end{aligned}$$

Trovati tutti i valori di n, riguardo a $\delta'' = 12'$, e per tutti i valori di x di $10'$ in $10'$ fino a 6^h inclusive, per le rimanenti ore da 6 a 12 si prenderanno gli stessi valori in ordine inverso; e per tutti gli altri valori che δ'' può avere nella tavola basterà regolarsi con le parti proporzionali.

Costruita la tavola sarà facilissima cosa calcolare con le differenze seconde non solo quando l'intervallo dell'elemento nella *C, T.* sia di 12^h, ma ancora per gli altri intervalli che sogliònsi in essa usare, dappoichè essendo questi tutti moltiplici o aliquote del 12, rimane solo a fare attenzione che se l'intervallo è 24^h, si dovrà entrar nella tavola con la metà dell'ora proposta; se è di 3^h col quadruplo; ec. cioè sempre con $\frac{12}{\textit{intervallo della tavola}} \times$ ora proposta.

485. Per le differenze seconde, come per tutte le differenze *pari*, dovendo esser dispari il numero de' termini, sarà spesso necessario, se vuolsi ridurre y al mezzo di essi, considerar come primo il secondo termine della serie.

Esempio.

Si domanda la declinazione del sole pel dì 16 dicembre 1840 a $11^h\ 54'$, t. m. di Parigi.

	decl ☉	diff. 1.ª	diff. 2.ª
15 dicembre	— 23° 18′ 36″,9		
		— 0° 02′ 41″,5	
16 dicembre	— 23° 21′ 18″,4		+ 0° 00′ 28″,1
		— 0 02 13 ,4	
17	— 23 23 31 ,8		

Con la differenza seconda 28″,1 e con l'ora 5 57′, metà dell'ora proposta $11^h\ 54'$ si troverà nella tavola XXVIII la correzione 3″,5 alla quale si darà il segno negativo, per la ragione che la differenza seconda è positiva; e si otterrà la declinazione del sole di 23° 22′ 28″,0 *Australe:*

$$\text{Cioè}\ a = -\ 23°\ 21'\ 18'',4$$
$$p = \quad -\ 1\quad 06\ ,1\ (24^h : -2'13'',4 :: 11^h 54' : p = -1'6'',1)$$
$$n = \quad -\ 03\ ,5$$

e l'equazione $y = a + p + n$, diverrà

$$y = -\ 23°21'\ 18''4 - 1'\ 06'',1 - 03''5 = -\ 23°\ 22'28'',0.$$

486. Quando, trattandosi degli elementi relativi a' moti della luna, voglia attendersi ad una maggiore esattezza, senza rinunziare al vantaggio della tavola XXVIII, e senza badare a quanto testè si è detto (485), si proceda nel seguente modo:

Si faccia la serie di quattro termini, come si chiedessero le differenze terze; si prenda il medio delle due differenze seconde che si avranno, e si tenga questo per la semplice differenza seconda, di cui abbiamo parlato (483): indi si proceda in tutto come già si è detto.

In questo caso bisogna avvertire, che prendendo per la serie, com'è regolare, due termini precedenti il nostro y, e due termini seguenti, disposizione relativa alle differenze terze, per servirci delle sole differenze seconde, a non più sarà il primo termine della serie, ma il secondo; cioè quello immediatamente precedente y, o sia il prossimo antecedente dell'ora di Parigi per la quale si calcola. E la differenza

prima sulla quale dovrannosi prendere le parti proporzionali, o sia il valore di p, sarà in conseguenza quella intermedia fra le tre che si avranno.

Esempio 1.°

Si domanda la latitudine della luna il dì 16 marzo 1840 a 6ʰ t. m. di Parigi.

	lat ☽	diff. 1.ª	diff. 2.ª
15 mezzanotte	+ 0° 39′ 57″,6		
		− 0° 36′ 04,7	
16 mezzodì	+ 0 03 52 ,9		+ 0° 00′ 15″,7
		− 0° 35 49,0	
16 mezzanotte	− 0 31 56 ,1		+ 0 00 44 ,2
		− 0 35 04,8	
17 mezzodì	− 1 07 00 ,9		
		somma . .	0 00 59 ,9
		metà . . .	+ 0 00 29 ,95

tav. XXVIII correzione per 6ʰ e per 30″ = − 3″,8 = n

parti proporzionali per 6ʰ sopra − 0° 35′ 49,0 = − 17′ 54″5 = p

y = + 0° 03′ 52″,9 − 17′ 54″,5 − 3″,8 = − 0° 14′ 05,4

Latitudine della luna all'ora data 0° 14′ 05″,4 *Australe.*

Esempio 2.°

Si domanda la longitudine della luna il dì 4 marzo 1840 a 16ʰ t. m. di Parigi.

	lat ☽	diff. 1.ª	diff. 2.ª
4 mezzodì	348° 10′ 41″,8		
		+ 6° 58′ 58″,5	
4 mezzanotte	355 09 40 ,3		+ 0° 03′ 36″,1
		+ 7 02 34 ,6	
5 mezzodì	2 12 14 ,9		+ 0 03 03 ,1
		+ 7 05 37 ,7	
5 mezzanotte	9 17 52 ,6		
		somma .	+ 0 06 39 ,2
		metà . .	+ 0 03 19 ,6

tavola XXVIII { correzione per 4ʰ e per 3′ . . . − 20″,0
correzione per 4ʰ e per 20″ . . − 02 ,2

correzione totale . . . − 22 ,2 = n

parti proporzionali per 4ʰ sopra 7° 02′ 34,6 = 2° 20′ 51″,5 = p

y = 355° 09′ 40″,3 + 2° 20′ 51″,5 − 22″,2

Longitudine della luna = 357° 30′ 09″6

487. *De' logaritmi proporzionali.* Il metodo delle parti proporzionali sulla differenza prima riceve anch' esso una facilitazione per mezzo della tavola XXIX detta de' *logaritmi logistici* o *proporzionali.*

Il logaritmo proporzionale di un numero di secondi è la differenza tra il logaritmo di $10800'' = 3^h$ o pure 3°, ed il logaritmo del numero proposto ridotto a secondi, e sempre minore di 3^h o pure 3°; e conservando solo cinque cifre della mantissa, oltre la caratteristica quando essa è maggiore dello zero; imperciocchè per la enunciata sottrazione di logaritmi è manifesto che da $1''$ fino a $1080''$, cioè fino a $18'$ vi sarà caratteristica, e da $1081''$ fino a $10799''$, essa sarà zero. Abbiamo che per le sole differenze prime (483)

$$y = a + \delta' \frac{x}{m} = a + p \text{ (483); quindi}$$

$$m : x :: \delta' : p$$

e poichè il log p. di una quantità di secondi q minore di 3^h è

$$\log \text{p.}\ q = \log 10800 - \log q$$

sostituendo avremo

$$\log \text{p.}\ p = \log \text{p.}\ \delta' + \log \text{p.}\ x - \log \text{p.}\ m.$$

E se m, primo termine della proporzione, facciasi eguale a 3^h o pure 3°, per la qual cosa log p. $m = 0$, rimarrà solamente a dovere addizionare i logaritmi logistici di δ' e di x, per ottenere il log p. p, e quindi conoscere il quarto termine, e facilitare la conoscenza del valore di $y = a + p$.

Esempio 1.°

Si domanda la distanza della luna dal sole il dì 6 marzo 1840, a $17^h\ 19'\ 42''$ t. m. a Parigi.

Distanza ☽ ☉ il dì 6 a 15^h	$38^\circ\ 54'\ 56'' = a$
da 15^h a 18^h, differenza in 3^h	$+\ 1\ 40\ 13$
$3^h : 2^h\ 19'\ 42'' :: 1^\circ\ 40'\ 13'' : p$	
$1^\circ\ 40'\ 13''$ log p 0.25433	
$2^h\ 19'\ 42''$ log p 0.11008	
log p p somma 0.36441 . .	$+\ 1^\circ\ 17\ 47'' = p$
Distanza richiesta.	$40\ 12\ 43 = y$

Esempio 2.°

Si domanda la distanza della luna da Polluce il dì 6 marzo 1840 a $10^h\ 29'\ 59''$ t. m. a Parigi.

Distanza ☽ ★ il dì 6 a 9^h . . . . $88^\circ\ 46'\ 52'' = a$

da 9^h a 12^h diff. in $3^h = -1^\circ\ 47'\ 28''$ log p = 0.22400

$1^h\ 29'\ 59''$ log p = 0.50111

log p p . . somma 0.52511 $= -0^\circ\ 53'\ 43{,}4 = p$

Distanza richiesta . . . . $87\ \ 53\ \ 08{,}6 = y$

E qui bisogna aggiungere, come già si è detto per la tavola XXVIII (485), che volendo della tavola XXIX servirsi ancora quando un elemento è dato ad intervallo diverso delle 3 ore per lo quale la medesima è costruita, sarà d'uopo entrarvi con $\frac{3}{\textit{intervallo della tavola}} \times$ ora proposta.

Effemeridi del sole.

488. *Obliquità apparente dell' eclittica.* L'obliquità dell'eclittica è stata calcolata, supponendo l'obliquità media di $23^\circ\ 27'\ 57''$ al 1.° gennaro 1800, e la variazione secolare di $48''$.

Le declinazioni del sole adunque, calcolate per tutti i giorni, suppongono l'obliquità media di $23^\circ\ 27'\ 57'' - 0'',48 \times$ *numero degli anni scorsi dal 1800 fino al corrente.* Questa obliquità apparente dell'eclittica serve a convertire le longitudini e latitudini geocentriche degli astri in ascensione retta e declinazione, e reciprocamente: essa è calcolata nella *C. T.* di 10 giorni in 10 giorni.

489. *Ascensione retta del sole.* Con l'obliquità apparente dell'eclittica e la longitudine vera del sole, si è calcolata l'ascensione retta; e questa, come la longitudine, è contata dall'equinozio apparente. È data nella *C. T.* pel mezzodì medio di ogni giorno, convertita in tempo. Chiedendola per un'ora qualunque si ricorrerà alle parti proporzionali; ma se il movimento diurno è grande può incorrersi in un errore di $0'',11$ di tempo, per la qual cosa, quando si volesse evitarlo, bisognerà tener conto delle differenze seconde (485).

Esempio.

Il dì 20 marzo 1840 si domanda l'AR ☉ a $3^h\ 25'\ 43''$ p. m. t. v. essendo a 140° di longitudine OP.

t. v. astr. a bordo il 20 marzo . .	3^h	$25'$	$43''$		
longitudine in tempo	$+9$	20			Ovest
t. v. astr. a Parigi il 20	12	45	43		
equazione del tempo per l'istante . .	0	07	24	,61	
t. m. a Parigi all' istante dato . . .	12	52	07	,61	
$\frac{1}{8}$	1	36	30	,95	$\log p = 0.27067$
dal 20 al 21 diff. in 24 ore . . .		$3'$	$38''$	,25	$\log p = 1.69497$
$p =$	0	$01'$	$57''$	,1	$\log p = 1.96564$
AR ☉ il dì 20 a mezzodì $= a =$	23	59	52	,46	
AR richiesta . . . . $y =$	00	01	49	,56	

490. L'ascensione retta del sole serve giornalmente a conoscere in un Osservatorio astronomico, per mezzo dell' osservazione del passaggio del sole al meridiano, lo stato di un pendolo regolato sul tempo sidereo. La differenza tra il tempo del passaggio osservato e l' ascensione retta del sole, calcolata pel mezzodì vero, dinota l' avanzo o il ritardo del pendolo sul tempo sidereo; poichè il giorno sidereo comincia precisamente all' istante in cui il punto equinoziale di primavera passa per lo meridiano.

491. *Declinazione del sole.* La declinazione del sole nella *C. T.* è data per ogni mezzodì medio di Parigi; e volendola per un' altra ora media ed in altro luogo, basterà ordinariamente farlo con la differenza di longitudine, e con le parti proporzionali: quando si voglia con maggiore esattezza si farà uso delle differenze seconde semplici (485).

Esempio 1.°

Si domanda la declinazione ☉ il dì 4 marzo 1840 a 11ʰ 12′ del mattino t. v. in un luogo situato a 20° 33′ di longitudine OP.

Ora astr. del luogo t. v. il dì 3 marzo	23ʰ 12′ 00	
Longitudine in tempo.	+1 22 12′ Ovest	
	24 34 12	
Ora astr. t. v. di Parigi il dì 4 marzo	0 34 12	
t. m. a mezzodì vero a Parigi il 4 marzo	+0 11 55,30	
Ora t. m. a Parigi all'istante dato .	0 46 07,30, c × 1/6 = 5′46″	log p = 1.49435
Declinazione ☉ a mezzodì 4 a Parigi	−6° 17′ 28″,4	
diff. dal 4 al 5. . . +23′10″,3	. . . .	log p = 0.89041
per 2ʰ . . . 1.55 ,858		
per 46′ { per 0.30 . . 0.28 ,964		
per 0.10 . . 0.09 ,655	+0 00 44 ,4, o pure log p 44″,5 = 2.38476	
per 0.05 . . 0.04 ,827		
per 0.01 . . 0.00 ,965 }		
Declinazione richiesta	−6 26 44 ,0	

Esempio 2.°

Si domanda la declinazione ☉ il dì 20 marzo 1840 a 3ʰ 46′ sera t. v. essendo a 32° 46′ di longitudine EP.

Ora astr. a bordo il dì 20 marzo t. v.	3ʰ 46′ 00″	
Longitudine in tempo	−2 11 04 Est	
Ora t. v. di Parigi il dì 20 marzo. .	1 34 56	
equaz. tempo per l'istante . .	+0 07 33.13	
Ora t. m. a Parigi all'istante dato .	1 42 29.13, c × 1/8 = 12′49″	log p = 1.14750
Declinazione ☉ a mezzodì 20 a Parigi	−0° 00′ 49″,1	
diff. dal 20 al 21. . . +23′40″,9	. . . .	log p = 0.88083
per 2ʰ . . 1.58 ,4		
per 1ʰ42′30″ { per 1. . . 0.59 ,2		
per 0.30′ . 0.29 ,6		
per 0.06 . 0.05 ,9	+0 01 41 ,1 o pure log p 1′ 41″,1 = 2.02833	
per 0.06 . 0.05 ,9		
per 0.00 30″ 0.00 ,5 }		
Declinazione richiesta	+0 00 52 ,0	

492. *Della longitudine del sole.* La longitudine del sole è calcolata nella *C. T.* per ogni giorno al mezzodì medio di Parigi col soccorso delle migliori tavole solari che si abbiano gli astronomi, contandola dall'equinozio *apparente*, rimanendola affetta di nutazione ed aberrazione (54). Volendo la longitudine del sole contata dall'equinozio *me-*

dio, bisognerà togliere dalla longitudine data l'aberrazione e la nutazione (53 e 54), elementi tutti dalla *C. T.* somministrati.

Per trovare la longitudine del sole per un'altra ora t. m. a Parigi si adopererà il metodo delle parti proporzionali.

Essendo dunque in un luogo qualunque si potrà avere la longitudine del sole per qualsivoglia ora; calcolando prima qual'è l'ora t. m. di Parigi che corrisponde all'istante dato sotto l'altro meridiano.

Esempio.

Si domanda la longitudine del sole il dì 20 marzo 1840 alle ore 5 20 p. m. t. m. essendo in longitudine 33° EP.

t. m. astr. il 20 marzo a bordo.	5ʰ	20'	00	
longitudine in tempo	2	12	00	Est
t. m. astr. di Parigi il 20	3	08	00	
$\frac{t}{8}$ =	0	23	30	log p = 0.88420
dal 20 al 21, diff. in 24 ore		59	29	log p = 0.48088
p =	0	7	46	log p = 1.36508
Long ☉ a mezzodì a Parigi, il 20 marzo = a =	359°	57'	56'',8	
Longitudine ☉ richiesta. . . . . y =	0	05	42 ,8	

Effemeridi della Luna.

493. *Longitudine e latitudine della luna.* Le longitudini e latitudini della luna sono calcolate nella *C. T.* per mezzodì e mezzanotte t. m. di Parigi, contando le prime dall'equinozio apparente. Tali elementi, allorquando debbono esser calcolati per un'altra ora t. m. di Parigi, esigono l'uso almeno delle differenze seconde (486).

494. *Ascensione retta e declinazione della luna.* Questi elementi di calcolo sono nella *C. T.* dedotti dalla latitudine e longitudine della luna, col mezzo dell'obliquità apparente dell'eclittica, e contando l'ascensione retta a partire dall'equinozio apparente. Essi vi sono notati per ogni mezzodì e mezzanotte di t. m. a Parigi; e si ottengono per ogni altra ora t. m. di Parigi, come si è detto per la longitudine e latitudine della luna.

495. *Parallasse orizzontale equatoriale della luna.* Questo elemento è stato calcolato per mezzodì e mezzanotte di ogni giorno, t. m. a Parigi; e sarà sufficiente avvalersi delle semplici parti proporzionali, onde averlo per un'altra ora qualunque, perciocchè eseguendo la correzione relativa alle differenze seconde (486), questa non si eleverebbe che fino a 0″,6.

Esempio.

Si domanda la parallasse equatoriale orizzontale della luna il dì 13 marzo 1840 a 4ʰ 37′ 22″ della sera t. v. essendo in longitudine 10° 45′ 33″ EP.

Ora astr. t. v. a bordo	4ʰ	37′	22″	
Long. in tempo	—	43	02,2 Est	
Ora di Parigi t. v. il dì 13 . . .	3	54	19,8	
t. m. a mezzodì vero a Parigi . .	0	09	37.77	
Ora di Parigi t. m.	4	03	57,57	
$\frac{t}{4}$ =	1	00	59,39	log p = 0.47001
Parall. equat. oriz. ☽ il dì 13 . .	0	58	12,2	
a 12 ore . .	0	58	00,0	
differenza in 12 ore . . . . . = —	0	00	12,2	log p = 2.94729
p = —	0		04,1	log p = 3.41730
a =	0	58	12,2	
Parallasse equatoriale richiesta y =	0	58	08,1	

Qui essendo iuutile l'esattezza di calcolare l'*equazione del tempo per l'istante* basterà, come spesso, avvalersi del t. m. a mezzodì v. a Parigi.

496. Abbiamo notato (374) non esser la parallasse orizzontale della luna, la medesima per tutte le latitudini, e che quella corrispondente ad una latitudine, in espressione della parallasse orizzontale equatoriale, si è $p = p' - p'x$ sen² L, per cui dovrà sempre sottrarsi la correzione $p'x$ sen² L (tav. VIII) dalla parallasse equatoriale p', onde avere p con esattezza, ne' calcoli che possono richiedere tale attenzione.

Esempio.

Nel caso dell' esempio antecedente, la latitudine della nave sia 42° N.

Parall. equat. orizzontale	0° 58′,08,1
Diminuzione per 42° lat.	05,2
Parall. orizzontale del luogo . . .	0 58 ,02,9

497. *Semidiametro orizzontale della luna.* Il semidiametro è calcolato per ogni mezzodì e mezzanotte di Parigi t. m., e con le parti proporzionali si potrà avere per un'altra ora qualunque.

Nel calcolo delle distanze osservate della luna dal sole, dalle stelle fisse, o da' pianeti, è d'uopo tener conto del suo aumento in altezza (411), onde avere l'altezza apparente del centro, e qualche volta ancora della correzione pel semidiametro inclinato (413).

Esempio.

Il dì 10 marzo 1840 essendo in longitudine 46° 37′ 18″ EP, si domanda il semidiametro centrale della luna alle 8^h 42′ 17″,4 del mattino t. m.

Ora astr. t. m. il dì 9.	20^h	42′	17″,4		
Longitudine in tempo	—3	06	29 ,2	Est	
Ora astr. t. m. a Parigi il dì 9.	17	35	48 ,2		
Dopo mezzanotte del dì 9 . . .	5	35	48 ,2		
	$\frac{1}{4}$ 1	23	57		log p = 0.33125
Semidiametro il 9 a mezzanotte .	0°	16′	09 ,3		
il 10 a mezzodì. .		16	07 ,4		
		00	01 ,9		log p = 3.76249
$p=$		00	00 ,886		log p = 4.09374
$a=$		16	09 ,3		
Semidiametro centrale richiesto $=y=$		16	08 ,4		

Esempio.

Supponiamo che nel caso dell'esempio precedente, vogliasi ancora il semidiametro relativo a 40° di altezza apparente ☽.

Semid. cent. per l'ora dell'osserv.	0°	16′	08″,4
Aumento per 40° altezza		+	10 ,7
Semid. prossimo in altezza ☽ . .		16	19 ,1
Diminuzione per la rifrazione . .		—	0 ,6
Semid. verticale ☽ a 40° altezza.		16	18 ,5

Esempio.

Supponiamo ora che pe' due esempi precedenti siasi al caso del calcolo di una distanza lunare, nel quale alt. ☽ 40°, alt. ☉ 43°, distanza osservata ☽ ☉ 74°, ed inclinazione all'orizzonte di tale arco di distanza, stimato ad occhio 42°.

Semidiametro ☽

Semid. prossimo in altezza	0° 16′	19″,1	
Diminuz. per rifraz. a 40° alt. e 42° incl.	—	0 ,29	
Semidiametro inclinato	16	18 ,81	

Semidiametro ☉

Semidiametro centrale	16	07	,11
Diminuz. per rifraz. a 43° alt. e 42° incl.	—	0	,26
Semidiametro inclinato	16	06	,85

498. ***Passaggio della luna al meridiano.*** Il passaggio del centro della luna pel meridiano di Parigi è dato dalla ***C. T.*** per ogni giorno in tempo medio astronomico; e quando nella colonna invece di un'ora corrispondente rinvienesi una linectta, vuolsi indicare con questa non esservi in tal giorno passaggio della luna pel meridiano di Parigi (447).

Per determinare l'ora del passaggio della luna per un altro meridiano qualunque, bisognerà distinguere due casi:

1.° Se il luogo è all'est di Parigi si prenderà la differenza tra l'ora del passaggio del giorno corrente, e quella del giorno precedente;

2.° Se il luogo è all'ovest di Parigi la differenza de' passaggi dovrà esser presa tra l'ora del giorno corrente, e quella dell'indomani;

In ambo i casi, mediante le parti proporzionali relative alla longitudine del luogo in tempo sulla differenza de' due passaggi consecutivi, si otterrà la quantità che *sottratta* nel primo caso, ed *aggiunta* nel secondo all'ora del passaggio della luna pel meridiano di Parigi nel giorno corrente, darà l'ora in t. m. del passaggio pel meridiano del luogo.

Se, in fine, questo passaggio è richiesto in tempo vero, è ben chiaro, che prima sarà d'uopo convertire in tempo vero l'ora t. m. data

dalla *C. T.* pel passaggio della luna al meridiano di Parigi, per tutti e due que' giorni ch' entrano nel calcolo; ed indi procedere in tutto come si è già esposto.

Esempio 1.°

Si domanda in t. m. del luogo il passaggio della luna per lo meridiano il dì 11 marzo 1840, essendo in longitudine 12° EP.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 11 t. m. .	6^h	50′		
(il luogo è all' Est) il dì 10 . .	5	48		
Ritardo in 24 ore	1	02		
$\frac{1}{8}$ = 0	07	45		log p = 1.36597
Longitudine in tempo 0	48	00		log p = 0.57403
Ritardo in 48′ (luogo Est). . . . . —0	02	04		log p = 1.94000
Passaggio ☽ a Parigi il dì 11 . . .	6	50		
Passaggio ☽ al meridiano del luogo .	6	47	56	

Esempio 2.°

Nel caso precedente la longitudine sia 12° OP.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 11. . . .	6	50		
(il luogo è all'Ovest) il dì 12 .	7	51		
Ritardo in 24 ore	1	01		
$\frac{1}{8}$ = 0	07	37,5		log p = 1.37304
Longitudine in tempo	48	00		log p = 0.57403
Ritardo in 48′ (luogo Ovest) . . . +	02	02		log p = 1.94707
Passaggio ☽ a Parigi il dì 11 . . .	6	50	00	
Passaggio ☽ al meridiano del luogo .	6	52	02	

499. Quando pel giorno proposto non vi sarà passaggio della luna pel meridiano di Parigi, si prenderà sempre il passaggio precedente ed il seguente, e sulla differenza di questi si calcoleranno le parti proporzionali dovute alla differenza di longitudine.

1.° Se la longitudine è orientale si toglieranno le parti proporzionali dall'ora del passaggio a Parigi immediatamente seguente, accresciuto di 24 ore. Se il residuo è minore di 24 ore, indicherà l'ora del passaggio pel giorno; se n'è maggiore, non vi sarà passaggio di luna in quel giorno pel meridiano del luogo proposto, ed il di più a 24 ore dinoterà il passaggio del giorno seguente.

2.° Se la longitudine è occidentale, le parti proporzionali saranno aggiunte all'ora del passaggio pel meridiano di Parigi, che precede il giorno dato. Risultando la somma minore di 24 ore, non vi sarà passaggio di luna pel meridiano del luogo nel giorno proposto; e quella somma indicherà il passaggio del giorno precedente; nel caso poi fosse maggiore di 24 ore, il di più esprimerà l'ora del passaggio della luna pel giorno dato e pel luogo proposto.

Esempio 1.°

Il dì 3 marzo 1840 essendo in longitudine 20° EP, si domanda l'ora t. m. del passaggio della luna per lo meridiano del luogo.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 3	——			
il dì 4 (+ 24^h) . .	24^h	26		
il dì 2	23	39		
Ritardo in 24 ore	00	47		
$\frac{1}{8}$ =	00	05	52,5	log p = 1.48627
Longitudine in tempo	1	20	00	log p = 0.35218
	—	02	36,5	log p = 1.83845
Passaggio il dì 4 (+ 24 ore) a Parigi .	24	26		
Non vi è passaggio pel dì 3	24	23	23,5	
Passaggio ☽ il dì 4 pel luogo.	00	23	23,5	

Esempio 2.°

Nel dì 30 maggio 1840, essendo in longitudine 140° EP, si domanda l'ora t. m. del passaggio della luna per lo meridiano.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 30.	——		
il dì 31 (+ 24^h) .	24^h	06′	
il dì 29.	23	00	
Ritardo in 24 ore	1	06	
Longitudine in tempo	9	20	
p. p. per 9^h 20′ { per 8^h . . 0^h 22′ 00″ ; 1 . . 0 02 45 ; 0 20′ 0 00 55 }	— 0	25	40
Passaggio il dì 31 (+ 24 ore) a Parigi . .	24	06	00
Passaggio ☽ il dì 30 pel luogo	23	40	20

Esempio 3.°

Nel primo esempio sia la longitudine occidentale.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 3	——			
il dì 4 (+ 24^h) . .	24^h	26'		
il dì 2	23	39		
Ritardo in 24 ore	00	47		
$\frac{1}{8}$ =	00	05	52,5	log p = 1.48627
Longitudine in tempo	1	20	00	log p = 0.35218
+	02	36,5		log p = 1.83845
Passaggio il dì 2 a Parigi	23	39		
Passaggio il dì 2 pel luogo.	23	41	36,5	

Non vi è passaggio pel giorno 3.

Esempio 4.°

Si faccia di 140° OP la longitudine del luogo, e si voglia il passaggio della luna per lo meridiano il dì 29 giugno 1840.

Passaggio ☽ a Parigi il dì 29.	——		
il dì 30 (+ 24^h) .	25^h	03'	
il dì 28.	23	58	
Ritardo in 24 ore	1	05	
Longitudine in tempo	9	20	
p. p. pel ritardo	+	25	16,7
Passaggio a Parigi il dì 28	23	58	
	24	23	16,7
Passaggio pel luogo il dì 29	00	23	16,7

500. ***Distanze lunari***. Le distanze geocentriche del centro della luna dal centro del sole, delle stelle fisse o de' pianeti sono date in tempo medio di Parigi da 3 ore in 3 ore a cominciare dal mezzodì medio; ed a lato sonovi notate le differenze, per facilitare il calcolo delle interpolazioni.

Sonosi riunite una dopo l'altra le distanze che possono osservarsi nella durata di un medesimo giorno, cominciando dagli astri più occidentali rispetto alla luna, e terminando a quelli più orientali, le quali posizioni sono indicate dalle iniziali E. O. Per tal disposizione si distingueranno a colpo d'occhio, in un giorno qualunque, gli astri dei quali potranno osservarsi le distanze lunari. Così pel 26 marzo 1840 si scorge immediatamente, che può aversi la distanza lunare da α della

Vergine, da Giove, da Antares, da Saturno che le sono all'ovest; e da Fomalhaut, da Venere e dal sole che le sono all' est.

L' istante di Parigi corrispondente ad una qualunque distanza lunare si avrà mediante le parti proporzionali, per le quali potremo avvalerci de' logaritmi logistici.

Esempio.

Il dì 26 marzo 1840 a bordo di una nave, si è trovata la distanza *vera* della luna da Antares di $41^{\circ}\ 34'\ 12''$ a $16^h\ 48'\ 32''$ t. m.; si domanda l'ora che contavasi a Parigi in tale istante.

La data distanza *vera* trovasi a cadere tra 21^h e 24^h del dì 26.

Diff. in 3^h	+	$1^{\circ}\ 32'\ 08''$	log p = 0.29086
Diff. tra la *vera* e quella di 21^h. . . .	+	0 17 08	log p = 1.02143
	$x = +$	$0^h\ 33'\ 28'',4$	log p = 0.73057
Ora prossima precedente		21 00 00	
Ora chiesta di Parigi		21 33 28 ,4	

o sia $1^{\circ}\ 32'\ 08'' : 0^{\circ}\ 17'\ 08'' :: 3^h : x = 0^h\ 33'\ 28'',4$.

E qui per incidente avvertiremo, che da ciò si deduce immediatamente esser la longitudine della nave $71^{\circ}\ 14'\ 06''$ OP.

Effemeridi de' sei pianeti principali Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno ed Urano.

501. Gli elementi di calcolo relativi a' sei pianeti principali sono calcolati similmente a quelli della luna, disposti ad intervalli di tempo eguali, onde facilitare il calcolo delle interpolazioni, quando chieggasi il luogo di un pianeta per un'altra epoca qualunque.

502. Per determinare l' ora del passaggio di un pianeta pel meridiano di un luogo di cognita longitudine, si prenderà dalla *C. T.* l'ora del passaggio del pianeta pel meridiano di Parigi nel giorno proposto, mercè delle parti proporzionali se occorre non essendo dati in essa i passaggi per tutti i giorni; ma per Mercurio ogni 3 giorni, per Venere e Marte ogni 6, per Giove ogni 8, per Saturno ogni 10 e per Urano ogni 15. Sulla differenza tra il passaggio a Parigi pel giorno dato, e per l'altro che precede nella tavola, si calcoleranno le parti proporzionali competenti alla longitudine del luogo; e queste debita-

mente aggiunte o tolte all' ora del passaggio pel meridiano di Parigi nel dì proposto, daranno l'ora del passaggio del pianeta pel meridiano del luogo.

Esempio.

Si domanda l'ora t. m. del passaggio di Venere pel meridiano di un luogo situato a 13o° di longitudine OP, nel dì 5 marzo 184o.

Passaggio ♀ a Parigi il dì 1		$21^h\ 50'$
il dì 7		21 56
Ritardo, diff. per 6 giorni		+ 0 06
p. p. per 4 giorni		+ 0 04
Passaggio ♀ a Parigi il dì 5		21 54
Longitudine in tempo	$6^h\ 40'$	
per 4 giorni . .	$+ 0^h\ 04'$	
per 8^h	0 00 20	+ 0 00 21,67
per 0 30'	0 00 01,25	
per 0 10	0 00 00,42	
Passaggio richiesto		21 54 21,67

5o3. Quì è da notare che i pianeti inferiori presentano un *ritardo* nel loro passaggio allo stesso meridiano, allorchè trovansi alla congiunzione superiore; viceversa, presentano *accelerazione*, trovandosi alla congiunzione inferiore; finalmente presso alle massime elongazioni sono *stazionari*, e per più giorni di seguito hanno la medesima accelerazione delle stelle fisse. La semplice ispezione della tavola ne farà conoscere se nel giorno dato il passaggio di Mercurio o di Venere *accelera*, o *ritarda*.

I pianeti superiori però hanno sempre *accelerazione* ne' loro passaggi al meridiano.

5o4. A fine di persuaderne di ciò, supponiamo per un momento esser le orbite tutte circolari e nel medesimo piano, e dopo aver posto il tempo della rivoluzione della terra = 1, facciamo approssimativamente quella di Mercurio $= \frac{1}{4}$

Venere $= \frac{2}{3}$

Marte $= 2$

Giove $= 12$

Saturno $= 3o$

Urano $= 8o$.

E per comodo del ragionamento diamo il segno — all'*accelerazione*, ed il segno + al *ritardo* giornaliero di ciascuno di essi.

Poichè per una stella fissa è accelerato giornalmente di 4′ circa il passaggio ad uno stesso meridiano, sarà di altrettanto accelerato il passaggio de' pianeti al meridiano, allorchè trovansi nelle stazioni; ed i limiti delle loro variazioni giornaliere in quanto al passaggio al meridiano saranno dalla somma sino alla sottrazione algebrica, dell'accelerazione diurna delle fisse e del movimento proprio espresso in tempo: cioè

★ in un giorno —	4′ 00″	— 20′ 00	accel. massima
☿ in un giorno —	16 00	+ 12 00	ritardo massimo
★ in un giorno —	4′ 00″	— 10′ 00	accel. massima
♀ in un giorno —	6 00	+ 02 00	ritardo massimo
★ in un giorno —	4′ 00″	— 6′ 00	accel. massima
♂ in un giorno —	2 00	— 2 00	accel. minima
★ in un giorno —	4′ 00″	— 4′ 20″	accel. massima
♃ in un giorno —	0 20	— 3 40	accel. minima
★ in un giorno —	4′ 00″	— 4′ 08″	accel. massima
♄ in un giorno —	0 08	— 3 52	accel. minima
★ in un giorno —	4′ 00″	— 4′ 03″	accel. massima
♅ in un giorno —	0 03	— 3 57	accel. minima

Pe' pianeti inferiori. Sia S il centro del sole (*fig. 73*), V Venere e T la terra. Nel piano del meridiano *ab* si trovino V, S e la stella B posta a distanza infinita, per la qual cosa le visuali che vi si potranno dirigere da qualunque punto dell'orbita terrestre saranno tutte tra loro parallele. Sia TT′ un arco di circa 4′ dalla terra descritto in un giorno: quando il meridiano *ab* avrà nuovamente nel suo piano la stella B, l'angolo *b*T′S sarà di 4′ (425).

Intanto, poichè Venere impiega a percorrere la sua orbita $\frac{2}{3}$ del tempo che la terra pone a descriver la sua, avremo $\frac{2}{3} : 1 :: 4' : x = 6'$ per distanza geocentrica di Venere *v* dalla stella B, dopo 24 ore solari dall'istante della sua congiunzione inferiore V, o sia *v*T′*b* sarà di 6′; e perciò *v* passerà per lo meridiano *ab* sei minuti prima della stella B e 10′ prima del sole S, coi quali astri il giorno innanti passò contemporaneamente; o in altri termini avrà avuto 10′ di *accelerazione* rispetto al giorno solare, e il suo moto ne parrà *retrogrado*.

Se supponiamo partir Venere dalla sua congiunzione superiore V′, i suoi 6′ verso Est sarebbero rappresentati da BT′v′, e Venere passerà per lo meridiano 6′ dopo la stella B, e solo 2′ dopo del sole S; laonde diremo aver essa in tale circostanza 2′ di *ritardo*, ed il moto *diretto*.

Pe' pianeti superiori. Analogamante alla figura precedente, sia M Marte (*fig. 74*) nella sua opposizione, ed essendo $2 : 1 :: 4' : x = 2'$ sarà mT′A = 2′. Sicchè se a mezzanotte del meridiano ab, trovansi in questo piano Marte M e la stella A nel primo giorno, nel dì seguente Marte passerà per lo meridiano 6′ prima della mezzanotte; imperciocchè, fatto l'angolo m''T′b di 2′ all'Est dello zero delle ore che è nel nostro caso in b, Marte sarà veduto in m; e quindi la metà inferiore del meridiano ab passerà prima innanti ad m, dopo 2′ innanti alla stella A, e finalmente giungerà dopo altri 4′ alla mezzanotte S′; dunque Marte passerà per lo meridiano 6′ avanti la mezza notte, o sia avrà 6′ di *accelerazione*, e il moto *retrogrado*.

Supposto Marte nella congiunzione M′, il giorno seguente l'angolo bT′m' sarà di 2′, quindi al meridiano passerà la stella B per 4′ prima del mezzodì, poi Marte m' soli 2′ avanti il mezzodì, finalmente il sole S a mezzodì preciso; e però Marte avrà avuto 2′ di *accelerazione*, e moto *diretto*.

Quantunque nel fatto queste quantità siano alquanto diverse, sembra che tanto basti al nostro scopo, il quale si era solo di acquistare una convinzione riguardo al segno.

Esempio.

Essendo in longitudine 12° EP si domanda il passaggio di Giove per lo meridiano il dì 1 maggio 1840, cioè 3 giorni prima dell'opposizione, che avviene il dì 4 maggio.

Passaggio a 30 aprile a Parigi .	12^h	14′	
a 8 maggio.	11	38	
Accelerazione per 8 giorni. . .	—	36	
per 1 giorno. . .	—	04	30
Passaggio a 30 aprile	12	14	
Passaggio a 1 maggio a Parigi .	12	09	30
Longitudine in tempo 48′			
p. p. per la longitudine	— 0	00	09,08
Passaggio al meridiano del luogo	12	09	20,08

505. La conoscenza dell' altezza meridiana di Venere, Marte, Giove e Saturno serve talvolta a determinare la latitudine del luogo, quando l'ora nella quale passano pel meridiano cada nella notte, o meglio nel tempo de' crepuscoli.

Posizioni apparenti delle stelle.

506. Allorchè si fa uso delle osservazioni delle stelle fisse in alcuno de' calcoli che occorrono in mare è necessario conoscerne le posizioni apparenti ; e però nella *C. T.* trovansi notate le ascensioni rette e le declinazioni apparenti di 67 stelle principali di 10 in 10 giorni, e per la polare di 3 in 3 giorni.

LEZIONE XLII.

Riduzione delle altezze e distanze angolari degli astri.

507. Conoscendo sufficientemente ciò che risguarda il modo di ottenere le altezze osservate degli astri, e le correzioni cui vanno soggette; il tempo e le sue varie specie di computo e di misura ; ed il maneggio della *Connaissance des temps*, n'è duopo applicarci a' diversi calcoli astronomici (316), la conoscenza de' quali è indispensabile all'uomo di mare, che voglia tenersi in grado d' intraprendere qualsiasi lunga navigazione.

Noi cominceremo adunque dal porre insieme e ridurre a metodo quanto si è detto intorno alle distanze angolari, onde con ciò pervenire dalle altezze osservate degli astri, alle altezze apparenti e vere de' loro centri.

508. *Per l' altezza vera.* Sia C il centro della terra (*fig.* 75) e BD il cerchio che ne rappresenta la sezione fattavi da ZHNO verticale che passa per l' astro S', e che noi a motivo della rifrazione vediamo in S; sia HO la proiezione ortografica dell' orizzonte razionale, *ho* quella dell' orizzonte sensibile, ed *h'o'* quella dell' orizzonte depresso, per un osservatore che trovisi elevato dalla superficie della terra nel punto *a*; il cerchio accennato ATMF sia la sezione fatta dal medesimo verticale dell' astro nello strato esteriore dell' atmosfera.

Il raggio di luce *m'i* che dal lembo inferiore dell' astro giunge all'occhio dell' osservatore in *a*, dopo la sua rifrazione in *i* per mezzo della curva *ia*, farà riferire il punto *m'* al punto *m*, e per la stessa ragione tutto l' astro S' parrà al luogo S.

L'osservatore adunque, se si attiene al lembo inferiore, misurerà con lo strumento l'angolo *mah'*, e da questo dovrà pervenire alla conoscenza dell' altro S'CH, ch' è l' altezza vera dell' astro.

1.° Dall' angolo *mah'* si tolga *hah'* rappresentante la depressione, e si avrà *mah, altezza apparente del lembo inferiore.*

2.° Da *mah* tolto *mam'*, cioè la rifrazione, si avrà *m'ah*, *altezza apparente del lembo inferiore*, *corretta di rifrazione.*

3.° Se ad *m'ah* aggiungeremo *am'n*, vale a dire *am'*C, parallasse del punto *m'* sarà noto *m'nh*, o sia *m'*CH, *altezza vera del lembo inferiore.*

4.° Finalmente, all'angolo *m'*CH aggiugnendo l'altro S'C*m'*, *semidiametro centrale*, o sottraendo quando si fosse osservato il lembo superiore, si otterrà S'CH, *altezza vera del centro dell'astro.*

Sicchè riunendo queste correzioni relative alle altezze osservate, avremo

$$S'CH = mah' - hah' - mam' + am'C + S'Cm'$$

nella quale equazione S'CH $=$ *altezza vera del centro*

mah' $=$ *altezza osservata del lembo*

hah' $=$ *depressione*

mam' $=$ *rifrazione*

*am'*C $=$ *parallasse*

S'C*m'* $=$ *semidiametro centrale.*

509. *Per l'altezza apparente.* Quando in un calcolo dovranno entrare l' altezza vera e l' apparente, per ottener questa si ha

$$Sah = mah' - hah' + Sam$$

cioè l' altezza apparente del centro è uguale all' altezza apparente del lembo espressa da *mah'* — *hah'*, più o meno il *semidiametro in altezza,* secondochè siasi osservato il lembo inferiore o superiore. La distinzione però di semidiametro centrale, e semidiametro in altezza sarà necessaria solo per la luna, potendo in ogni altro caso esser trascurata.

Si avverta che, se l' altezza è stata osservata sull' orizzonte artificiale con un sestante, l' errore d' indice dovrà esser rettificato prima di pren-

dere la metà dell' angolo osservato, la quale dinota l' altezza; ma ciò importa, che siccome con l' orizzonte artificiale, a fine di evitare la correzione del semidiametro, sogliosi misurare le due distanze angolari de' lembi dell' astro a' due dell' immagine; ed indi per mezzo della quarta parte della somma di esse, ottenere l' altezza apparente del centro; così bisognerebbe correggere questo doppio angolo per ogni altezza, del doppio dell' errore d' indice (396 a 398); quindi sarà più comodo adottare il sistema di dedurre prima l' altezza strumentale, e poi correggerla della metà dell' errore d' indice per ridurla ad apparente del centro; essendochè tal errore appartiene ad ogni angolo misurato, il quale è sempre il doppio dell' altezza.

Per *altezza strumentale* intendiamo quella che direttamente si legge sul sestante od ottante che sia, affetta dall' errore dello strumento; per la qual cosa, adoperando il cerchio, essa avrà luogo solo quando è impiegato come sestante; ma non mai quando è usato come cerchio, cioè incrociando le distanze angolari in un modo qualunque, *sempre a dritta, sempre a sinistra* o *capovolgendo* lo strumento.

Pochi esempî faranno meglio intendere quanto finora si è detto.

Altezza del sole.

510. Ridurre un'altezza *osservata* del sole ad altezza *apparente* e *vera*.

Esempio 1.°

Il dì 16 marzo 1840 si è avuta con un sestante l' altezza ☉ 12° 13′ 40″, essendo la rettifica da fare allo strumento di — 2′ 10″; l' elevazione dell' occhio 15 piedi. Si domanda l' altezza vera del centro.

Altezza strumentale ☉	12°	13′	40″
Rettifica dello strumento	—	2	10
Altezza osservata ☉	12	11	30
Depressione per 15 piedi (tav. XV) . .	—	3	55
Altezza apparente ☉	12	07	35
Rifrazione media — parallasse (tav. X) .	—	4	16,2
Altezza vera ☉	12	03	18,8
Semidiametro centrale (*C. T.*)	+	16	05,61
Altezza vera del centro ☉	12	19	24,41

Esempio 2.°

Il dì 23 marzo 1840 si è osservata, con un cerchio di Troughton, un'altezza incrociata ☉; essendo l'elevazione dell'occhio di 20 piedi; l'altezza del barometro $0^m,764$; quella del termometro centigrado di + 20 gradi. Si domandano le altezze *vera* ed *apparente* del centro.

Osservazione a sinistra	linda A =	53°	43′	00″
	B =	53	43	00
	C =	53	42	20
Osservazione a dritta	linda A =	54	22	20
	B =	54	22	20
	C =	54	21	40
		24	14	40
Altezza osservata ☉		54	02	26,67
Depressione per 20 piedi (tav. XV)		—	5	03
Altezza apparente ☉		53	57	23,67
Rifrazione media — parallasse			—	37
Altezza prossima ☉		53	56	46,67
Per 764 del Bar. e 54° alt. (tav. XI) + 0″,26 Per + 20° del Ter. e 54° alt. (tav. XII) — 1 ,56			—	01,30
Altezza vera ☉		53	56	45,47
Semidiametro centrale (*C. T.*)		+	16	03,68
Altezza vera del centro		54	12	49,15
Altezza apparente ☉		53°	57′	23″,67
Semidiametro in altezza (*C. T.*) 16′ 03″,68 Diminuz. per rifraz. a 54° altezza — 38		+	16′	03″,30
Altezza apparente del centro ☉		54	13	26 ,97

Esempio 3.°

Il dì 26 marzo 1840 sonosi osservate con un sestante il cui errore d'indice era + 3′ 30″, due altezze del sole, mediante l'orizzonte artificiale, mentre il barometro segnava 746 millimetri, ed il termometro centigrado — 2°,7; si domandano le altezze *vera* ed *apparente*.

Angoli osservati . 1.° contatto		25°	12′	20″
2.° contatto		25	44	30
	somma =	50	56	50
Altezza strumentale del centro	½ =	12	44	12 ,5
½ rettifica dello strumento		—	1	45
Altezza *apparente* ☉		12	42	27 ,5
Rifrazione media — parall.		—	4	04 ,8
Altezza prossima ☉		12	38	22 ,7
Per 746 Bar. — 4″,63 Per — 2°,7 Ter. + 12,73			+	8 ,1
Altezza *vera* ☉		12	38	30 ,8

Altezza della luna.

511. Riducre un' altezza *osservata* della luna ad altezza *vera*.

Esempio 1.°

Il dì 9 marzo 1840 a circa 4 ore della sera t. v. essendo in latitudine 45° 17′ N, e longitudine 16° 40′ OP, si è osservata l'altezza ☽ 66° 30′ 40″, con un sestante che richiedeva una rettifica di — 3′ 20″, e con l'occhio elevato di 25 piedi; si domanda l'altezza *vera* del centro della luna.

Ora astr. a bordo t. v.	4ʰ	00′	00″
Diff. di long. in tempo	+1	06	40 OP
Ora di Parigi t. v.	5	06	40
Equazione del tempo per detta ora. . .	+0	10	39.27
Ora di Parigi t. m.	5	17.	19,27
Semidiametro orizzontale, o centrale . . .		16	10,6
Parallasse equatoriale orizzontale. . . .		59	22,2

Altezza strumentale ☽	66°	30′	40″
Rettifica dello strumento	—	3	20
Altezza osservata ☽	66	27	20
Depressione per 25 piedi.	—	5	04
Altezza apparente ☽	66	22	16
Parallasse — Rifrazione	+	23	23
Altezza vera ☽	66	45	39
Semidiametro centrale	+	16	10,6
Altezza *vera* ☽	67	01	49,6

Esempio 2.°

Il dì 5 marzo 1840, a circa 6ʰ 39′ t. m. astronomico, essendo in latitudine 19°49′ N, e long. stimata 11° 54′ 54″ OP, si è osservata un'altezza ☽ 8° 48′ 40″, con un sestante che richiedeva di rettifica — 3′ 20″, con l'occhio elevato di 25 piedi, e mentre il barometro segnava 0ᵐ, 746, ed il termometro Reaumur + 18°; si domanda l'altezza *vera* e l'altezza *apparente* del centro della luna, per servire ad un calcolo di longitudine.

Ora astr. t. m. a bordo	6ʰ	39′		
Diff. di long. in tempo	+0	47	39	,6 OP
Ora t. m. a Parigi	7	26	39	,6
Parallasse equatoriale per l'ora di Parigi	0°	59′	06″	,5
Diminuzione per 20° di latitudine		—	01	,4
Parallasse orizzontale per la lat. e per detta ora . . .	0	59	5	,1
Semidiametro centrale per detta ora		16	06	,5

Altezza strumentale ☽		8°	48′	40″
Rettifica dello strumento		—	3	20
Altezza osservata ☽		8	45	20
Depressione per 25 piedi		—	5	04
Altezza apparente ☽		8	40	16
Parall. — Rifr.	+ 52′ 20″,76			
746 barometro	+ 6 ,77	+	52	38,23
+ 18 termometro	+ 10 ,70			
Altezza *vera* ☽		9	32	54,23
Semidiametro centrale		+	16	06,5
Altezza *vera* centro ☽		9	49	00,73
Altezza apparente ☽		8	40	16
Semidiametro orizzontale	16′ 06″,5			
Aumento per l'altezza	+ 2 ,52			
Diminuzione per la rifraz.	— 10 ,1			
Semidiametro verticale in altezza		+	15	58,92
Altezza *apparente* centro ☽		8	56	14,92

Altezza d' un pianeta.

512. Per ridurre l'altezza osservata di un pianeta ad altezza *vera* ed *apparente* del centro non sarà necessario dedurre la seconda separatamente dalla prima, essendo il semidiametro assai piccolo.

Esempio 1.°

Il dì 1 marzo 1840, la sera, si è osservata l'altezza del lembo inferiore di Venere 16° 13′ 30″ con un sestante il cui errore d'indice era + 2′, ed essendo di 17 piedi l'elevazione dell'occhio, si domanda l'altezza *vera* ed *apparente* del centro.

a 1.° marzo { Parallasse orizzontale di Venere . . . 7″,16
Semidiametro centrale o orizzontale. . 6 ,57

Altezza strumentale ♀	16°	13′	30″
Rettifica dello strumento	—	2	00
Altezza osservata ♀	16	11	30
Depressione per 17 piedi	—	4	10
Altezza apparente ♀	16	07	20
Semidiametro		+	6,57
Altezza *apparente* centro ♀	16	07	26,57
Rifrazione	—	3	19
Altezza prossima centro ♀	16	04	07,57
Parallasse in altezza (tav. IX)		+	06,75
Altezza *vera* del centro ♀	16	04	14,32

Esempio 2.°

Il dì 18 marzo 1840, la mattina, si è osservata l'altezza del lembo inferiore di Giove 30° 10' 20'', con un sestante che richiedeva di rettifica — 2', ed essendo di 17 piedi l'elevazione dell'occhio, si domanda l'altezza *vera* ed *apparente* del centro.

a 18 marzo	Parallasse orizzontale di Giove	2'',0
	Semidiametro centrale	21 ,8

Altezza strumentale ♃	30°	10'	20''
Rettifica dello strumento	—	2	00
Altezza osservata ♃	30	08	20
Depressione per 17 piedi	—	4	10
Altezza apparente ♃	30	04	10
Semidiametro		+	21,8
Altezza *apparente* centro ♃	30	04	31,8
Rifrazione	—	1	41,0
Altezza prossima centro ♃	30	02	50,8
Parallasse in altezza		+	1,7
Altezza *vera* centro ♃	30	02	52,5

Allorchè nell'istante dell'osservazione si tenga conto delle indicazioni del barometro e del termometro, la rifrazione verrà debitamente modificata secondo ciò che si è praticato pel sole, vale a dire servendosi del segno della tavola, e non del contrario come si è fatto per la luna; perocchè i pianeti hanno come il sole la rifrazione sempre maggiore della parallasse; e con più ragione quando trattisi di una stella, essendo sempre zero la parallasse di una stella fissa.

Altezza di una stella.

513. Non avendo diametro le stelle fisse rispettivamente a noi, per esser collocate a distanze infinite, non si potrà avere distinzione di lembo, e si procede ritenendo come osservazione del centro dell'astro quello che si ha dal punto luminoso che lo rappresenta.

Esempio.

Essendosi osservata l'altezza di Aldebaran 13° 04′ 30″, con un sestante la cui rettifica è — 3′ 40″, avendo l'occhio elevato di 19 piedi, e mentre il barometro segnava $0^m,742$ ed il termometro centigrado + 30°; si domandano le sue altezze *vera* ed *apparente*.

Altezza strumentale ★			13° 04′ 30″
Rettifica del sestante			— 3 40
Altezza osservata ★			13 00 50
Depressione per 19 piedi			— 4 25
Altezza *apparente* ★			12 56 25
Rifrazione media	—	4′ 09″	
742 barometro	—	05,9	— 4 32,0
+ 30° termometro	—	17,1	
Altezza *vera* di Aldebaran			12 51 53

Ridurre l'altezza vera *ad altezza* apparente *e* strumentale.

514. Si supponga l'altezza vera del centro ottenuta non dall'altezza osservata, ma dal calcolo, ed esser d'uopo conoscere altresì l'altezza apparente.

Sarà noto l'angolo S′CH (*fig.* 75) e devesi pervenire alla conoscenza di S*ah*; laonde faremo S*ah* = S′*xh* — *x*S′*a* + S′*a*S, nella quale equazione

S*ah* = *altezza apparente richiesta*.
S′*xh* = S′CH = *altezza vera calcolata*
*x*S′*a* = CS′*a* = *parallasse dell'altezza vera*
S′*a*S = *rifrazione per l'altezza apparente.*

Non potendosi avere direttamente la parallasse e la rifrazione dell'altezza apparente, si farà uso prima della parallasse e della rifrazione corrispondente all'altezza vera, principalmente quando le altezze sono piccole; ed indi, avuta così un'altezza *apparente prossima*, si prenderà nuovamente nella tavola la parallasse e la rifrazione corrispondente a quest'altezza, e si terrà come quella relativa all'altezza *apparente*, e ne sarà sempre abbastanza vicina.

Se oltre all'altezza apparente del centro si richiedesse l'altezza strumentale di uno de' due lembi, si faranno le correzioni della depressione, del semidiametro e della rettifica dello strumento, col segno con-

trario a quello che avrebbero avuto nel calcolo diretto, passando dall'altezza strumentale all'altezza vera. Ma in tal caso l'equazione di cui dovremo avvalerci sarà $mah = m'nh - nm'a + m'am$, nella quale

mah = *altezza osservata del lembo* (inferiore in questo caso)
$m'nh = m'CH$ = *altezza vera del lembo*
$nm'a$ = *parallasse in altezza del lembo*
$m'am$ = *rifrazione per l'altezza apparente del lembo.*

Esempio 1.°

Il dì 16 marzo 1840, essendosi calcolata l'altezza vera del centro del sole 37° 01′ 53″, si domanda l'altezza *apparente* del centro.

Altezza calcolata ☉	37°	01′	53″
Rifrazione — parallasse	+	01	09,9
Altezza apparente prossima ☉	37	03	02,9
Rifrazione — parallasse	+	01	09,85
Altezza *apparente* richiesta	37	03	02,85

Si voglia direttamente l'altezza *strumentale* del lembo inferiore, essendo la rettifica di + 3′, e l'elevazione di 20 piedi.

Altezza calcolata ☉	37°	01′	53″
Semidiametro centrale	—	16	05,61
Altezza vera ☉	36	45	47,39
Rifrazione — parallasse	+	01	10,7
Altezza apparente prossima ☉	36	46	58,09
Rifrazione — parallasse	+	01	10,65
Altezza apparente ☉	36	46	58,04
Depressione per 20 piedi	+	04	32
Altezza osservata ☉	36	51	30,04
Rettifica dello strumento	—	03	00
Altezza *strumentale* richiesta	36	48	30,04

E qui possiamo nuovamente ottenere l'altezza *apparente* del centro, cioè

Altezza apparente ☉		36 46 58,04
Semidiametro in altezza	+ 16′ 05″,61	+ 16 04,81
Diminuzione per la rifrazione	— 0 ,8	
Altezza *apparente* centro ☉		37 03 02,85

Laonde quando si chiedessero insieme l' altezza *apparente* del centro e l'altezza *strumentale* del lembo inferiore, (p. e.) sarà meglio procedere come siegue.

Altezza calcolata ☉		37° 01′ 53″
Rifrazione — Parallasse		+ 01 09,9
Altezza apparente prossima		37 03 02,9
Rifrazione — parallasse		+ 01 09,85
Altezza *apparente* centro ☉		37 03 02,85
Semidiametro in altezza	— 16′ 05″,61	— 16 04,81
Diminuzione per la rifrazione	+ 0 ,8	
Altezza apparente ☉		36 46 58,04
Depressione per 20 piedi		+ 04 ,32
Altezza osservata ☉		36 51 30,04
Rettifica dello strumento		— 03 00
Altezza *strumentale* ☉		36 48 30,04

Esempio 2.°

L'altezza vera di una stella essendo stata calcolata di 42° 20′, si domanda l' altezza *apparente*.

Altezza vera ★	42° 20′ 00″
Rifrazione per detta altezza	+ 01 04
Altezza apparente prossima	42 21 04
Rifrazione per 42° 21 04″	+ 01 03,95
Altezza *apparente* richiesta	42 21 03,95

Esempio 3.°

Il dì 18 marzo 1840, si è calcolata l'altezza *vera* del centro di Giove 30° 02′ 52″,5, si domanda l'altezza *strumentale* del lembo inferiore; avendo un sestante che richiede di rettifica — 2′, ed essendo di 17 piedi l'elevazione dell'occhio.

a 18 marzo	Parallasse orizzontale di Giove	02″,0
	Semidiametro centrale	21 ,8

Altezza *vera* centro ♃	30° 02 52,5
Semidiametro	— 21,8
Altezza vera ♃	30 02 30,7
Parallasse in altezza	— 01,7
Altezza prossima ♃	30 02 29
Rifrazione	+ 1 41
Altezza apparente prossima ♃	30 04 10
Rifrazione	+ 1 41
Altezza apparente ♃	30 04 10
Depressione per 17 piedi	+ 04 10
Altezza osservata ♃	30 0 20
Rettifica dello strumento	+ 02 00
Altezza *strumentale* richiesta ♃	30 10 20

Esempio 4.°

Il dì 10 marzo 1840, essendo in longitudine 46° 37′ 18″ EP e latitudine 42° N, si è ottenuta dal calcolo l'altezza del centro della luna 40° 00′ 00″ per l'ora 8 42′ 17″,4 t. m. del mattino; si domanda l'altezza *apparente* del centro.

Ora astr. t. m. il dì 9	20h	42′	17″,4		
Longitudine in tempo	— 3	06	29 ,2	Est	
Ora t. m. a Parigi il dì 9.	17	35	48 ,2		
Dopo mezzanotte del dì 9.	5	35	48 ,2		
	¼ = 1	23	57	log p = 0.33125	
Parallasse equat. il 9 a mezzanotte . . .	0°	59′	16″,8		
il 10 a mezzodì	0	59	10 ,0		
differenza	— 0	00	06 ,8	log p = 3.20172	
Parti proporzionali della parallasse	— 0	00	03 ,2	log p = 3.53297	
Parallasse equat. per l'istante dato	0	59	13 ,6		
Diminuzione per 42° di latitudine		—	05 ,3		
Parall. oriz. pel luogo e per l'istante . .	0	59	08 ,3		

Parall. — rifr. per alt. 40° (tav. XIV). . .		44′	09″,3
Rifraz. per detta altezza (tav. X)	+	1	09
Parallasse prossima in altezza	0	45	18 ,3
Altezza vera	40	00	00
Altezza scorretta di parallasse prossima . .	39	14	41 ,7
Parall. — rifr. per l'altezza prossima . . .		44′	37″,2
Rifrazione per 39° 15′		1	11 ,25
Parallasse in altezza, richiesta.		45	48 ,45

Questa parallasse di altezza, quantunque abbastanza approssimata, non è ancora la vera, perocchè corrispondendo essa all'altezza scorretta di parallasse 39° 14′ 41″,7 darà per altezza vera 40° 00′ 30″,2, e non mica l'altezza vera data 40°.

Dovrà indi *farsi lo stesso per la parallasse corrispondente all' altezza del lembo.*

Altezza *vera* ☽, calcolata	40°	00′	00″
Parallasse per 40° altezza vera	—	45	48,4
Altezza scorretta di parallasse	39	14	11,6
Rifrazione per 39° 14′	+	01	11,3
Altezza apparente prossima	39	15	22,90
Rifrazione per 39° 15′	+	1	11,25
Altezza *apparente* richiesta.	39	15	22,85

Se in questo esempio si chiedesse direttamente l'altezza *strumentale* del lembo inferiore, per un'elevazione di 20 piedi, e per un sestante che abbisognasse di rettifica + 3'; si dovrebbe accrescere l'apparecchio del calcolo di quanto risguarda il semidiametro, ed indi procedere come testè si è detto pel sole.

Semidiametro il 9 a mezzanotte	0° 16′ 09″,3	
il 10 a mezzodì	0 16 07 ,4	
differenza	— 0 00 01 ,9	log p = 3.76249
per	1 23 57	log p = 0.33125
Parti proporzionali pel semidiametro . . .	— 0 00 00 ,886	log p = 4.09374
Semidiametro *centrale* per l'istante dato .	0 16 08 ,4	
Aumento per 40° di altezza	+ 10 ,7	
Semidiametro prossimo in altezza	16 19 ,1	
Diminuzione per la rifrazione.	— 00 ,6	
Semidiametro *verticale in altezza*. . . .	16 18 ,5	

Altezza calcolata ☽	40° 00′ 00″
Semidiametro centrale	— 16 08,4
Altezza vera ☽	39 43 51,6
Parallasse in altezza ☽	— 45 58,6
Altezza ☽ scorretta di parallasse	38 57 53,0
Rifrazione per 38° 58′	+ 1 12,1
Altezza app. prossima ☽	38 59 05,1
Rifrazione per 39°	+ 1 12,0
Altezza *apparente* ☽.	38 59 05,0
Depressione per 20 piedi.	+ 4 32
Altezza osservata ☽	39 03 37,0
Rettifica del sestante.	— 3
Altezza strumentale.	39 00 37,0

Volendo poi da questo calcolo dell'altezza *strumentale* dedurre ancora l'altezza *apparente* del centro, si farebbe

Altezza apparente ☽	38 59 05,0
Semidiametro in altezza	+ 16 18,5
Altezza *apparente* centro ☽	39 15 23,5

Ma quando dall'altezza *vera* calcolata bisognava dedurre tanto l'altezza *apparente* del centro che l'altezza *strumentale*, dopo ciò che riguarda la ricerca dell'ora di Parigi, della parallasse e del semidiametro, facea mestieri, come già si è avvertito nel primo esempio, regolarsi nel seguente modo.

Altezza *vera* calcolata ☽	40°	00′	00″
Parallasse per 40° altezza	—	45	48,5
Altezza scorretta di Parallasse.	39	14	11,5
Rifrazione per 39° 14′	+	01	11,3
Altezza apparente prossima.	39	15	22,8
Rifrazione per 39° 15′	+	01	11,25
Altezza *apparente* centro ☽	39	15	22,75
Semidiametro verticale in altezza	—	16	18,5
Altezza apparente ☽	38	59	04,25
Depressione per 20 piedi	+	4	32
Altezza osservata ☽	39	03	36,25
Rettifica del sestante	—	03	00
Altezza *strumentale* ☽	39	00	36,25

515. La parallasse in altezza da noi calcolata per mezzo delle tavole XIV e X, potevasi ancora ottenere facendo $\pi = p \cos A$, in dove π è la parallasse di altezza, p è la parallasse orizzontale del luogo ed A l'altezza per la quale la parallasse è richiesta; quindi si ha $1 : \text{sen}\, p :: \cos A : \text{sen}\, \pi$ (368), e per la picciolezza degli angoli p e π, potendosi confondere i seni con gli archi, avremo l'indicata formola generale; per cui nel caso del nostro esempio

p 0° 59′ 08″,3 log . . = 3.5500203
A 40 00 00 ,0 log cos = 9.8842540
π 0 45 18 ,2 log . . = 3.4342743

p 0° 59′ 08 ,3 log . . = 3.5500203
A 39 14 41 ,8 log cos = 9.8889925
π 0 45 47 ,975 log = 3.4390128

516. Per ovviare, nel calcolo dell'altezza apparente, alle incertezze derivanti dalla mancanza di precisione nella parallasse relativa ad una data altezza *vera*, bisognerà occuparci di ottenere direttamente dal calcolo *l'altezza scorretta di parallasse:*

Essa è rappresentata dall'angolo $S'ah$ che chiameremo $\alpha = A - \pi$

(*fig.* 75), ed abbassando la perpendicolare S′g, seno dell'altezza vera S′CH, ed *ht* seno della parallasse orizzontale del luogo *h*CH, o sia C*ha*; avremo pel triangolo rettangolo S′*ar*

$$\tan \alpha = \frac{rS'}{ar} = \frac{S'g - ht}{ar} = \frac{\text{sen A} - \text{sen } p}{\cos A}, \text{ onde}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2}(A - p) \cos \frac{1}{2}(A + p)}{\cos A} \quad (274,31) \text{ ; e nel nostro caso}$$

$A = 40^\circ\ 00'\ 00'',0$	colog cos = 0.1157460	
$p = \quad 59\ \ 08\ ,3$		
$A - p = 39\ \ 00\ \ 51\ ,7$		
$\frac{1}{2}(A - p) = 19\ \ 30\ \ 25\ ,8$	log sen = 9.5236486	
$A + p = 40\ \ 59\ \ 08\ ,3$		
$\frac{1}{2}(A + p) = 20\ \ 29\ \ 34\ ,2$	log cos = 9.9716080	
	log 2 = 0.3010300	
$\alpha = 39\ \ 14\ \ 15\ ,9$	log tan = 9.9120326	

Per altezza scorretta di parallasse abbiamo avuto, mediante l'approssimazione (514) 39° 14′ 11,55, adunque si è avuto un errore di 4″35, il quale ne fa risultare l'altezza *apparente* di 39° 15′ 22″,8, mentre la è di 39 15 27,15; cioè

Altezza scorretta di parallasse	39° 14′ 15″,9
Rifrazione per 39° 14′	+ 1 11 ,3
Altezza apparente prossima	39 15 27 ,2
Rifrazione per 39° 15′	+ 1 11 ,25
Altezza *apparente* richiesta	39 15 27 ,15

517. Da ciò è manifesto che, in quanto agli elementi del calcolo, sarà solo necessaria la parallasse orizzontale pel luogo e per l'istante; e quindi sarà sempre preferibile, mirando all'esattezza, il metodo ora esposto (516). E quando ne' calcoli meno rilevanti può prescindersi dal rigore, ci avvaleremo della tavola XXX; la quale, calcolata su questi principî da 5° fino a 8° di 5′ in 5′, e da 8° sino a 89° di grado in grado, offre bastante approssimazione, e dà la correzione intera per passare d'un sol tratto dall'altezza vera all'apparente.

Altezza vera	40° 00′ 00″,0
Correzione per la tavola XXX	— 44 36 ,26
Altezza apparente richiesta	39 15 23 ,74

Riduzione delle altezze da un luogo ad un altro.

518. Spesso ne' calcoli astronomici occorre in mare servirci di due altezze di un medesimo astro, fatte ad ore differenti e nello stesso luogo; e siccome rare volte avviene, che la nave non cangi di luogo sulla superficie del mare per più ore di seguito, così diviene indispensabile il ridurre una delle due altezze al luogo dell'altra.

Nella pratica suol sempre preferirsi di ridurre la minore altezza al luogo della maggiore; perciocchè essendo tale specie di calcolo diretto a rinvenire la latitudine, quanto più l'altezza è presso al meridiano, la si avrà con maggiore esattezza.

Siano A e B (*fig. 76*) due luoghi, ed NM il meridiano di A, AS la sezione con l'orizzonte, del verticale che passa per l'astro S nell'atto dell'osservazione dell'altezza, o in altri termini, sia AS il rilevamento dell'astro fatto dal punto A nell'istante dell'altezza osservata; e finalmente sia BS′ alle medesime condizioni rispetto al punto B.

Quando s'intendano menate nel medesimo istante le visuali AS e BS′ all'astro S, bisognerà che queste siano parallele. E se AS rappresenta la proiezione dell'arco di verticale indicante la distanza dello zenit di A dall'astro S; indicherà BS′ quella della distanza zenittale rispetto al punto B, menando da S l'arco di cerchio massimo SS′ sul verticale BS′. Or se, similmente nella sfera celeste, da B tiriamo un arco di cerchio massimo BC perpendicolare ad AS, sarà la distanza zenittale $BS' = AS - AC$.

Si pongano le seguenti notazioni

A = *altezza minore osservata dal punto* A,

A' = *altezza minore, al luogo* B *della maggiore altezza*,

c = AC *correzione dovuta alla minore altezza*,

m = AB *distanza in miglia* da A a B,

$z = BAM + MAS = BAC$,

sarà pel triangolo BAC

$m \times \cos z = +c$, *correzione additiva, se l'angolo è acuto*

$m(-\cos z) = -c$, *correzione sottrattiva, se l'angolo è ottuso*

$m \times \cos 90° = 0$, *correzione nulla*

$m \times \cos 0 = +m$, *correzione totale ed additiva*

$m \times \cos 180° = -m$, *correzione totale e negativa.*

È ben chiaro che se prima si osservi l'altezza maggiore in B, e poi l'altezza minore in A il cammino BA sarà stato percorso dalla parte delle negative rispetto ad S, e la correzione AC sarà negativa, e però si avrà la distanza zenittale $BS' = AC - (-AC) = AS + AC$, e la correzione dell'altezza, complemento di BS' diverrà

$-m \times \cos z \quad = -c$ *correzione sottrattiva, se l'angolo è acuto*
$-m(-\cos z) \quad = +c$ *correzione positiva, se l'angolo è ottuso*
$-m \times \cos\ 90° = 0$ *correzione nulla*
$-m \times \cos\ 0 \quad = -m$ *correzione totale e negativa*
$-m \times \cos\ 180° = +m$ *correzione totale ed additiva.*

519. A prima vista sembra necessario in qnesta riduzione lo avvertire alla differenza de' tempi contati all'istante medesimo ne' due luoghi differenti A e B; dappoichè, eccetto il caso si trovassero sullo stesso meridiano, è d'uopo che ne' luoghi A e B si contino ore diverse, quando l'istante è lo stesso. Ma per esser ciò vero, bisognerebbe che in A si osservasse con un oriuolo regolato sul meridiano di A, e si osservasse in B con un oriuolo regolato sul meridiano di B: in vece, a bordo, si riferiscono le osservazioni sempre allo stesso oriuolo regolato per lo più su di un terzo luogo diverso da A e da B, dunque siffatta riduzione delle ore non deve aver luogo.

In fatti, se nell'istante della prima altezza in A erano $10^h\ 3'$ del mattino, rispetto al meridiano del luogo; e simultaneamente erano 10^h in B, e 9^h a Parigi o ad altro luogo qualunque, per lo meridiano del quale potesse trovarsi regolato l'oriuolo a cui si è riferito l'istante dell'osservazione, non cesserà mai di esser questo alle 9^h di Parigi, sia che l'osservazione abbia avuto luogo a $10^h\ 3'$ di A, o pure a 10^h di B.

Adunque l'intervallo di tempo scorso tra l'osservazione della prima altezza in A, e l'osservazione della seconda altezza in B, sarà direttamente indicato dall'oriuolo impiegato nelle due osservazioni, salvo solo se v'è correzione relativa al suo andamento diurno.

Esempio 1.°

Si è osservata un'altezza ☉, dalla quale si è avuto per altezza vera 22° 18′ 30″, mentre il sole avea di azzimutto S 48° E. La nave ha percorso miglia 23,5 per S 25° O nell'intervallo di 2^h 15′, quando si è osservata una seconda altezza maggiore della prima. Si vuol ridurre la prima altezza al luogo della seconda.

Angolo *compreso* . .	73°	log cos = 9.4659353
Distanza percorsa . .	23,5	log = 1.3710679
	6,8707	log = 0.8370032
Correzione . . . +	6′ 52″,2	
Altezza vera. . +	22 18 30 ,0	
Altezza ridotta . .	22 25 22 ,2	

Esempio 2.°

Nell'esempio precedente la rotta seguita sia N 25° E.

Angolo *compreso* . .	107°	log cos = 9.4659353
Distanza percorsa . .	23,5	log = 1.3710679
	6,87	log = 0.8370032
Correzione . . . —	6′ 52″,2	
Altezza vera. . +	22 18 30 ,0	
Altezza ridotta . .	22 11 37 ,8	

Esempio 3.°

Sia nello stesso esempio nuovamente il rombo navigato S 25° O, ma l'altezza vera 22° 18′ 30″ sia quella della seconda osservazione, e minore di quella della prima.

Angolo *compreso* . .	73°	log cos = 9.4659353
Distanza percorsa . .	23,5	log = 1.3710679
	6,87	log = 0.8370032
+	6′ 52″,2	
Altezza vera. . —	22 18 30 ,0	
Altezza ridotta . .	22 11 37 ,8	

Esempio 4.°

Nel caso dell'esempio precedente il rombo navigato sia N 25° E.

Angolo *compreso* . .	107°	log cos = 9.4659353
Distanza percorsa . .	23,5	log = 1.3710679
	6,87	log = 0.8370032
Correzione . . . . —	6′ 52″,2	
Altezza vera. . —	22 18 30 ,0	
Altezza ridotta . .	22 25 22 ,2	

Il segno dell'altezza dinota qui l'andamento di essa dalla prima alla seconda osservazione.

Ridurre le distanze lunari apparenti de' lembi a distanze apparenti de' centri.

520. Qui parleremo solamente della riduzione delle distanze lunari apparenti de' lembi a distanze apparenti de' centri, giacchè per rinvenire la distanza vera de' centri è d'uopo un calcolo di cui più tardi terremo proposito a suo luogo.

Osservata che siasi la distanza d'un lembo della luna da quello di un altro astro qualunque, che da ora innanti in tale circostanza denomineremo *secondo astro*, bisognerà correggerla dell' errore dell' istrumento, se ha luogo, e di quello di deviazione, se siasi verificata; allora per aver la distanza apparente de' centri rimarrà solamente a correggerla de' semidiametri. Se il secondo astro sia il sole, la distanza de' lembi sarà sempre quella de' lembi prossimi, ma quando il secondo astro fosse un pianeta o una stella, bisognerà avvertire con quale dei lembi siasi preso il contatto nell'osservazione; onde poter procedere debitamente a così fatta correzione.

521. È ben chiaro che se la distanza fosse presa rispetto ad un pianeta, in vece del semidiametro del sole si dovrà impiegare quello del pianeta, che per la sua picciolezza non richiede correzione d' inclinazione; e se rispetto ad una stella non si dovrà impiegare quantità veruna per suo semidiametro. E finalmente, in ambo questi casi, se la distanza è stata osservata da' lembi remoti, i semidiametri ch' entrar debbono nel calcolo saranno sottrattivi, in vece di essere una correzione additiva, quando trattasi de' lembi prossimi, come avviene sempre, se è secondo astro il sole.

Esempio.

Il dì 10 marzo 1840, essendo in longitudine 46° 37′ 18″ EP alle 8ʰ 42′ 17″,4 t. m. del mattino si è osservata la distanza de' lembi ☽ ☉ 74°, corretta di deviazione e di errore d'indice; e per altre osservazioni simultanee alla prima, si è avuto altezza vera ☽ 40°, ed altezza vera ☉ 43°; mentre tali astri mentalmente proiettati sopra un piano perpendicolare all'orizzonte, e parallelo all'aspetto dell'osservatore, offrivano una congiungente de'centri inclinata di circa 42° all'orizzonte. Si domanda distanza apparente de' centri.

Ora astr. t. m. il dì 9	20ʰ 42′ 17″,4		
Longitudine in tempo	— 3 06 29 ,2	Est	
Ora astr. t. m. a Parigi il dì 9	17 35 48 ,2		
Dopo mezzanotte del dì 9.	5 35 48 ,2		
$\frac{1}{4}$	1 23 57	log p = 0.33125	
Semidiametro il dì 9 a mezzanotte. . . .	0° 16′ 09″,3		
il dì 10 a mezzodì	16 07 ,4		
	00 01 ,4	log p = 3.76249	
	— 00 00 ,9	log p = 4.09374	
Semidiametro il 9 a mezzanotte.	16 09 ,3		
Semidiametro *centrale* per l'istante dato .	16 08 ,4		
Aumento per 40° altezza.	+ 10 ,7		
Semidiametro prossimo in altezza	16 19 ,1		
Diminuz. per rifraz. a 40° alt. e 42° incl.	— 0 ,29		
Semidiametro ☽ *per la distanza*.	16 18 ,81		
Semidiametro centrale ☉	16′ 07″,11		
Diminuz. per rifraz. a 43° alt. e 42 incl.	— 0 ,26		
Semidiametro ☉ *per la distanza*	16 06 ,85		
Distanza apparente de' lembi	74° 00′ 00″		
Semidiametro inclinato ☽	16 18 ,81		
Semidiametro inclinato ☉	16 06 ,85		
Distanza *apparente* ☽ ☉	74 32 25 ,66		

LEZIONE XLIII.

Del calcolo dell'altezza degli astri.

522. Essendo nota la declinazione e l'ascensione retta di un astro, e nello stesso tempo la declinazione e l'ascensione retta dello zenit, sarà facile, mercè la soluzione di un triangolo sferico, rinvenir la distanza dell'astro dallo zenit, e quindi il suo complemento, o sia l'altezza dell'astro dall'orizzonte (314). Con la differenza tra le ascensioni rette del-

l'astro e dello zenit, o sia del meridiano, sarà noto l'angolo al polo, che n'è la misura; il quale vien detto per tal ragione *angolo orario*. Adunque il triangolo sferico dal quale dobbiamo ottenere la distanza zenittale, e quindi l'altezza dell'astro dall'orizzonte, dev'esser formato dal complemento della declinazione del vertice, o sia complemento della latitudine del luogo; dal complemento della declinazione, o distanza polare, i quali due archi formano l'angolo orario già noto; e dal complemento dell'altezza, ch'è l'elemento da calcolare.

Sia HZON (*fig.* 77) il meridiano di un luogo, HO l'orizzonte, Z lo zenit, EQ l'equatore, P e p i poli del mondo, S l'astro, mn il parallelo che per la rotazione terrestre sembra esso descrivere, ZSt il verticale e PSr il cerchio di declinazione. Devesi dunque calcolare SZ nel triangolo ZPS, in dove sono noti ZP, PS e l'angolo ZPS.

Si pongano le seguenti notazioni di cui ancora ci serviremo in seguito:

P = *angolo orario*
L = *latitudine del luogo* l = *colatitudine del luogo*
D = *declinazione* . . . d = *distanza polare* (dal polo elevato)
A = *Altezza vera* . . a = *distanza zenittale*
B = *Altezza app.* . . b = *distanza zenittale app.*

e quando gli stessi elementi, in vece di appartenere ad un astro qualunque, sono relativi alla luna, distingueremo ciò con un apice.

Per trovare a, abbiamo (282 e 290)

$$\tan\varphi = \tan l \cos P, \text{ e } \cos a = \text{sen } A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi)}{\cos \varphi}$$

523. Se da Z meniamo l'arco di cerchio massimo Zq perpendicolare ad SP, il segmento φ sarà rappresentato da Pq necessariamente minore del quadrante Pr, perocchè la declinazione è supposta della stessa specie della latitudine, e quindi ancora $d - \varphi$ è minore del quadrante; e lo continuerà ad essere finchè l'astro per la sua declinazione non si trovi, all'istante dato, al di sotto dell'orizzonte in S′, divenendo solo in tal caso ZS′ maggiore del quadrante; ed in conseguenza, pel triangolo rettangolo ZS′q, di cui l'angolo S′ è acuto, il cateto S′q dovrà essere maggiore

del quadrante (294), come ancora avverrà per ZS″q″; mentre viceversa restano entrambi φ e d ∾ φ minori del quadrante ne' casi di ZS‴q‴ e ZPq per S′. Vale a dire in generale, *se gli archi φ e d ∾ φ sono ciascuno minore del quadrante,* giacchè tutti e due maggiori è impossibile, *l'astro è al di sopra dell'orizzonte;* e se per lo contrario *uno di essi è maggiore di* 90°, *l'astro, all'istante dato nel calcolo, trovasi in depressione.*

Esempio 1.°

Il dì 7 marzo 1846, essendo per istima in latitudine 38° 42′ N e longitudine 13° 43′ 43″,2 OP; si domanda l'altezza del sole all'istante del mattino che il cronometro segnava 8h 20′ 37″7, mentre era in avanzo sul mezzodì medio del dì 6 a Parigi 0h 07′ 57″,62 ed avea un andamento diurno + 26″,5.

Per l'ora t. v. della nave.

Ora astr. del cron. il dì 6.		20h 20′ 37″,70	
Avanzo a mezzodì medio del 6 . . .		— 07 57 ,62	
Ora prossima t. m. a Parigi		20 12 40 ,08	
p. p. dell'avanzo per 20h, 12′ . . .		— 00 22 ,30	
Ora astr. t. m. a Parigi		20 12 17 ,78	
t. m. a mezzodì v. a Parigi il 6 . .		+ 0 11 27 ,46	(*equaz. sul m. v.*)
correzione (tav. XXI)		+ 00 ,11	
t. v. a mezzodì m. a Parigi		— 0 11 27 ,57	(*equaz. sul m. m.*)
differenza in 24 ore . .	— 14″,55		
per 12 ore . . .	7 ,275		
per 6 ore . . .	3 ,6375		
per 2 ore . . .	1 ,2125		
per 0,12′ . . .	0 ,1212		
	12 ,2462		
per 20h 12′		+ 12 ,24	
equaz. sul m. m. per l'ora data . .		— 0 11 15 ,33	
Ora astr. t. m. a Parigi		20 12 17 ,78	
Ora astr. t. v. a Parigi		20 01 02 ,45	
Longitudine in tempo		— 0 54 54 ,88	
Ora t. v. a bordo		19 06 07 ,57	
	P =	4 53 52 ,43	
	P =	73° 28′ 06″,5	

Per la declinazione ☉

il dì 5 marzo	— 5° 54′ 18″,1				
		+ 23′ 15″,1			
6 marzo	— 5 31 03 ,0		+ 0′ 04″,4		
		+ 23 19 ,5			
7 marzo	— 5 07 43 ,5				

Declinazione il dì 6.	—	5°	31′	03″	,00
p. p. per 20^h sopra 23′ 19″,5.	+	0	19	37	,91
Declinazione per la diff. 1.ª	—	5	11	25	,09
Per $\frac{1}{2} \times 20^h = 10^h$, e per + 4″4 . . .	—	0	00	00	,30
Declinaz. per la diff. 2.ª	—	5	11	25	,39
$d =$		95	11	25	,39

Per l' altezza.

$$\tan \varphi = \tan l \cos P, \quad \text{o} \quad \text{sen} A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi)}{\cos \varphi}$$

$l =$ 51° 18′ 00″,00	log tan = 0.0962856	. . . log cos = 9.7960486
$P =$ 73 28 06 ,50	log cos = 9.4541477	
$\varphi =$ 19 33 12 ,20	log tan = 9.5504333	. . colog cos = 0.0257970
$d =$ 95 11 25 ,40		
$d \sim \varphi$ 75 38 13 ,20	. . . .	log cos = 9.3945644
$A =$ 9 28 24 ,80	*altezza richiesta*	log sen = 9.2164100

Esempio 2.°

Il dì 7 marzo 1840, nelle ore p. m. essendo in latitudine 38° 42′ N e longitudine 14° 12′ 31″,25 OP. Si domanda l' altezza vera del centro della luna per l'istante che un cronometro regolato sul mezzodì medio di Parigi, segnava, secondo si è dedotto da' confronti, 5^h 43′ 25″,96; esso era in avanzo sul mezzodì medio di Parigi il giorno 7 marzo di 0^h 08′ 24″,12, secondo la tavola del suo andamento diurno, il quale è + 26″,5.

Per l'ora t. v. della nave.

Ora del cronometro all'istante dato					5^h	43′	25″	,96
Avanzo a tutto il mezzodì m. 7 a Parigi.					—	08	24	,12
Ora prossima t. m. a Parigi.					5	35	01	,84
p. p. per 5^h 35′ sopra 26″,5.					—	00	06	,16
Ora t. m. a Parigi.					5	34	55	,68
t. m. a m. v. a Parigi il 7 =	+ 0^h	11′	12″	,91				
Correzione (tav. XXI)	+ 0	00	00	,11				
t. v. a m. m. a Parigi.	— 0	11	13	,02				
Diff. dell'equaz. in 24 ore — 14″,96								
p. p. per 54^h 34′ 55″,68.		+	03	,48				
equaz. sul m. m. per l'ora data .	— 0	11	09	,54	—	11	09	,54
t. v. a Parigi all'ora data					5	23	46	,14
Longitudine in tempo.					—	56	50	,08
Ora t. v. a bordo all'istante dato					4	26	56	,06

Ascensione retta del meridiano.

AR ☉ a mezzodì m. 7 marzo a Parigi.	23^h	12′	15″	,85
Aumento in 24 ore m. 3′ 41″,59				
p. p. per 5^h 35′ t. m. di Parigi.			+ 51	,55
AR ☉ più le p. p. per l'aumento.	23	13	07	,40
Ora t. v. della nave.	4	26	56	,06
AR del meridiano del luogo all'ora data	3	40	03	,46
AR del meridiano in gradi	55°	00′	51″	,90

Ascensione retta della luna.

il dì 6 12^h = 20° 22′ 33″,2
+ 6° 43′ 46″,6
7 00 = 27 06 19 ,8 + 0° 11′ 53″,5
+ 6 55 40 ,1
7 12 = 34 01 59 ,9 + 0 12 50 ,6
+ 7 08 30 ,7
8 00 = 41 10 30 ,6

somma + 0 24 44 ,1
metà + 0 12 22 ,05

AR ☽ pel dì 7 marzo	27° 06′ 19″ ,80
p. p. sopra + 6° 55′ 40″,1 per 5h 34′ 55″,68 di Parigi.	3 13 21 ,58
AR ☽ per la diff. 1.a	30 19 41 ,38
per 5h 35′ e per 12′ . . . . . . — 1′ 29″,50 } per 5 35 e per 22″ . . . . . . — 0 02 ,67 }	— 01 32 ,17
AR per la diff. 2.a	30 18 09 ,21

Per l'angolo orario ☽

AR del meridiano . . . . 55° 00′ 51″ ,90

Angolo orario per la luna . . . . P′ = 24 42 42 ,69 all'Ovest

Declinazione.

il dì 6 12h = + 12° 45′ 28″ ,5			
	+ 3° 00′ 26″ ,4		
7 00 = + 15 45 54 ,9		— 0° 12′ 41″ ,6	
	+ 2 47 44 ,8		
7 12 = + 18 33 39 ,7		— 0 15 45 ,7	
	+ 2 31 59 ,1		
8 00 = + 21 05 38 ,8			
		somma — 0 28 27 ,30	
		metà — 0 14 13 ,65	

Declinazione ☽ a m. m. 7 a Parigi	+ 15° 45′ 54″ ,90
p. p. sopra + 2° 47′ 44″,8 per 5h 34′ 55″,68 di Parigi .	+ 1 18 01 ,85
Declinazione per la diff. 1.a	+ 17 03 56 ,75
Per 5h 35′ e per — 14′	+ 01 44 ,45
Per 5 35 e per — 14″	+ 00 01 ,80
Declinazione ☽ per diff. 2.a	+ 17 05 43 ,00
	d′ = 72 54 17 ,00

Altezza vera ☽

$$\tan\varphi = \tan l \cos P', \text{ e sen } A' = \frac{\cos l \cos(d' \sim \varphi)}{\cos\varphi}$$

l = 51° 18′ 00″ ,00	log tan = 0.0962856 . . .	log cos = 9.7960486
P′ = 24 42 42 ,69	log cos = 9.9582875	
φ = 48 35 25 ,56	log tan = 0.0545731 . .	colog cos = 0.1795114
d' = 72 54 17 ,00		
$d' \sim \varphi$ = 24 18 51 ,44	. . . .	log cos = 9.9596616
A′ = 59 28 40 ,40	Altezza vera	log sen = 9.9352216

Esempio 3.°

Il dì 11 marzo 1840 a $10^h\ 12'\ 56''$ t. m. della sera a Parigi, dedotto dal cronometro, essendo in latitudine $37°\ 30'$ N e longitudine $24°\ 16'$ EP, si domanda l'altezza vera di Sirio.

Ora t. m. di Parigi		10^h	$12'$	$56''$	,00
equazione sul mezzodì m. per l'istante	—		10	03	,98
Ora t. v. a Parigi		10	02	52	,02
Longitudine in tempo	+	1	37	04	,00
Ora t. v. a bordo.		11	39	56	,02
AR ☉ a m. m. il dì 11 a Parigi.		23	26	59	,99
Aumento in 24 ore $3'\ 40''$,17					
p. p. per $10^h\ 12'\ 56''$.		00	01	33	,72
AR ☉ più le p. p. per l'aumento		23	28	33	,71
Ora t. v. della nave.		11	39	56	,02
AR del meridiano della nave		11	08	29	,73
AR di Sirio		6	38	07	,01
Angolo orario di Sirio	P =	4	30	22	,72 Ovest
	P =	67°	35′	40″	,80
Declinazione di Sirio.	—	16	30	11	,60
	d =	106	30	11	,60

$$\tan\varphi = \tan l \cos P\,,\quad \text{e}\quad \operatorname{sen} A = \frac{\cos l \cos(d \sim \varphi)}{\cos\varphi}$$

l =	52°	30′	00″	,00	log tan = 0.1150195	log cos = 9.7844471
P =	67	35	40	,80	log cos = 9.5811032	
φ =	26	24	54	,33	log tan = 9.6961227	colog cos = 0.0478886
d =	106	30	11	,60		
$d \sim \varphi$ =	80	05	17	,27	. . . .	log cos = 9.2358646
A =	6	43	09	,19	Altezza *vera*	log sen = 9.0682003

524. Se $L = 0$, ovvero $l = 90°$

$$\tan\varphi = \tan l \cos P = \infty \times \cos P\,,\ \text{dunque}\ \varphi = 90°$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\cos l \cos(d \sim \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos l \cos(d \sim \varphi) \tan l \cos P}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$= \operatorname{sen} d \cos P\,,\ \text{quindi}$$

$$\operatorname{sen} A = \cos D \cos P$$

seno dell'altezza = coseno declinazione × coseno dell'angolo orario.

Esempio.

Il dì 11 marzo 1840, a $10^h\ 12'\ 56''$ t. m. della mattina a Parigi, desunto dal cronometro, essendo sull'equatore, ed in longitudine 56° 18' EP, si domanda l'altezza vera del sole.

Ora astr. t. m. di Parigi il dì 10		22^h	12'	56''
equazione sul m. m. per l'istante	—	10	12,15	
Ora astr. t. v. a Parigi		22	02	43,85
Longitudine in tempo	+	3	45	12
Ora astr. t. v. del dì 11 al luogo.		1	47	55,85
	P =	26	58	57,75
Declinazione ☉ a mezzodì m. 10 a Parigi. . .	—	3	57	23,00
Differenza in 24 ore + 23' 32'',9				
p. p. per $22^h\ 12'\ 56''$	+		21	47,84
Declinazione ☉ per l'istante dato	D = —	3	35	35,16

$$\text{sen } A = \cos D \cos P$$

D =	— 3° 35' 35'',16	log cos = 9.9991454
P =	26 58 57 ,75	log cos = 9.9499475
A =	62 47 48 ,7	log sen = 9.9490929

Il segno negativo della declinazione ne fa intanto conoscere che il sole è dalla parte del sud rispetto all'osservatore; è poichè l'ora è pomeridiana, esso si troverà in un verticale del terzo quadrante; laddove se la declinazione avesse avuto il segno positivo, si sarebbe trovato il sole in un verticale del quarto quadrante.

525. Se D = o, ovvero $d = 90°$

$$\text{sen } A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi) \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi} = \frac{\cos l \text{ sen } \varphi \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi}$$

$$= \text{sen } l \cos P, \text{ quindi}$$

$$\text{sen } A = \cos L \cos P.$$

seno dell'altezza = coseno latitudine × coseno angolo orario.

Esempio.

Il dì 20 marzo 1840 a $0^h\ 49'\ 45'',6$ t. m. della sera a Parigi, dedotto dal cronometro, essendo in lat. $52°\ 30'$ N e long. $12°\ 30'$ OP, si domanda l'altezza vera del sole.

Ora astr. t. m. a Parigi il dì 20	$0\ 49'\ 45'',6$
equazione sul mezzodì m. per l'istante	$-\ 0\ 07\ \ 33\ ,81$
Ora astr. t. v. a Parigi	$0\ 42\ \ 11\ ,79$
Longitudine in tempo	$-\ 0\ 50\ \ 00\ ,00$
Ora astr. t. v. del dì 19 a bordo	$23\ 52\ \ 11\ ,79$
	$P = 00\ 07\ \ 48\ ,21$ Est
	$P = 1°57'\ 03'',15$
Declinazione ☉ a mezzodì m. il 20 a Parigi . . .	$-00\ 00\ \ 49\ ,1$
Differenza in 24 ore $= 23'\ 40'',9$	
p. p. per $0^h\ 49'\ 45'',6$	$+00\ 00\ \ 49\ ,1$
Declinazione per l'istante dato	$d = 0\ 00\ \ 00\ ,0$

$$\text{sen } A = \cos L \cos P$$

$L = 52°\ 30'$	$\log\cos = 9.7844471$
$P = 1\ \ 57\ \ 03,15$	$\log\cos = 9.9997525$
$A = 37\ \ 28\ \ 29,82$	$\log\text{sen} = 9.7841996$

526. Se $L = 90°$, ovvero $l = 0$, e $\phi = 0$

$$\text{sen } A = \frac{\cos l \cos (d \backsim \varphi) \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi} = \frac{0}{0} \text{ sen } D \cos P$$

Essendo dunque *indeterminato* il prodotto de' due fattori che rappresentano il valore di sen A è necessario indagare da quale circostanza proviene la indeterminazione. Per essere $L = 90°$ l'orizzonte razionale del luogo sarà confuso con l'equatore celeste, e però le amplitudini con le ascensioni rette, ed i verticali coi cerchi di declinazione; per la qual cosa ognuno di questi sarà meridiano del luogo, e il luogo invece di un sol meridiano ne avrà infiniti; laonde P, che esser deve contato dal meridiano, sarà *indeterminato.* Per lo contrario D, distanza dell' astro dall' equatore, cioè declinazione, rimanendo sempre dello stesso valore, sarà fattore costante. Adunque sen $A = \frac{0}{0}$ sen D cos P sarà meglio scritto sotto la forma sen $A =$ sen $D \times \frac{0}{0}$ cos P, e dinoterà che l'altezza è eguale alla declinazione in tutti gl' istanti possibili; ed il verticale, o cerchio di declinazione, o meridiano che passa per l'astro,

corrisponderà per effetto della rotazioue terrestre, *successivamente* a tutti gl' infiniti punti dell' orizzonte.

527. Se $D = 90°$, ovvero $d = o$

$$\text{sen } A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi) \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi} = \frac{\cos l \cos \varphi \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi}$$
$$= \cos l \cot \varphi \tan l \cos P$$
$$= \cos l \cot \varphi \tan \varphi$$
$$= \cos l$$

$$\text{sen } A = \text{sen } L$$

L' altezza dell' astro, o sia l' altezza del polo, sarà *stabilmente* eguale alla latitudine del luogo.

528. Se $L = o$ e $D = o$, ovvero $l = 90°$ e $d = 90°$, e $\varphi = 90°$

$$\text{sen } A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi) \tan l \cos P}{\text{sen } \varphi} \text{ diverrà}$$

$$\text{sen } A = \tfrac{o}{o} \cos P$$

L' altezza e l' angolo orario saranno complementi tra loro, per tempo *indeterminato*, cioè per tutti gl' istanti possibili.

529. Se $L = 90°$ e $D = 90°$

Si ha per $L = 90°$ (526)

$$\text{sen } A = \text{sen } D \times \tfrac{o}{o} \cos P, \text{ dunque}$$
$$\text{sen } A = 1 \times \tfrac{o}{o} \cos P.$$

Cioè l'altezza sarà 90° per tutti gl'istanti *indeterminatamente* e quindi l' astro dovrà trovarsi sempre allo zenit, al polo, al medesimo punto.

530. Se $L = 90°$ e $D = o$

Abbiamo per $L = 90°$ (526)

$$\text{sen } A = \text{sen } D \times \tfrac{o}{o} \cos P, \text{ dunque}$$
$$\text{sen } A = o \times \tfrac{o}{o} \cos P$$

Cioè l' altezza sarà zero *indeterminatamente* per tutti gl' istanti possibili; ovvero, l'astro, rimanendo sempre all' orizzonte, corrisponderà *successivamente* a tutti gl' infiniti punti di esso.

531. Se $L = 0$ e $D = 90°$

Abbiamo per $L = 0°$

$$\text{sen } A = \cos D \cos P \text{ (524), dunque}$$

$$\text{sen } A = 0$$

Cioè l'altezza dell'astro o sia del polo sarà *stabilmente* zero; cioè l'altezza sarà nulla, ed il polo corrisponderà sempre allo stesso punto dell'orizzonte.

532. Il calcolo dell'altezza di un astro, avendo per elementi dati la declinazione, la latitudine e l'angolo orario, i quali due ultimi possono essere per lo più inesatti, dipendendo la latitudine dalle incertezze del loche e della bussola, e l'angolo orario da una macchina così delicata come sappiamo essere il cronometro; n'è d'uopo esaminare quale sia il momento più favorevole all'osservazione dell'altezza, perchè errori esistenti sulla latitudine o sull'angolo orario affettino il meno possibile l'altezza che si richiede.

Si ha dalla seconda analogia differenziale (300) $da = dl \cos Z$, donde è chiaro che $\cos Z$ divenendo zero quando l'astro è nel primo verticale, perchè allora si ha $Z = 90°$, diverrà $da = 0$; vale a dire un errore commesso sulla latitudine non influisce nulla sull'altezza, se l'osservazione è fatta nell'istante che l'astro è al primo verticale. Ed inoltre, essendo in generale $\cos Z$ sempre minore dell'unità, il prodotto di $dl \cos Z$, sarà sempre minore del fattore dl, e perciò avremo sempre $da < dl$; o sia, quando ancora l'altezza non siasi osservata nel momento dell'astro al primo verticale, l'errore di cui sarà affetta l'altezza calcolata, è sempre minore di quello che può essersi commesso sulla latitudine.

In quanto all'errore prodotto sull'altezza da quello commesso sull'angolo orario, abbiamo $da = dP \frac{\text{sen } Z \text{ sen } PZ}{R^2}$ (302); ma il prodotto di sen Z sen PZ è necessariamente sempre minore di R^2, dunque l'espressione frazionaria del secondo membro è sempre minore dell'unità; quindi $dP \frac{\text{sen } Z \text{ sen } PZ}{R^2} < dP$, e similmente $da < dP$; o sia l'errore dell'altezza calcolata sarà sempre minore di quello dell'angolo orario. Inoltre sen Z

è massimo quando l'astro è al primo verticale, ed a misura che più se ne allontana, diverrà sempre minore; adunque, *da* avrà un valore tanto più piccolo, quanto più lontano dal primo verticale l'astro si trovi; ed il massimo valore, quando l'astro è al primo verticale, senza però cessar mai di essere $da < dP$.

Da ciò rilevasi, che il giudizio sull'istante favorevole per lo quale debba calcolarsi un'altezza, dipenderà dalla circostanza di poter meglio fidare della latitudine, o dell'ora. Se vi è incertezza sulla latitudine, calcoleremo l'altezza dell'astro per l'istante che esso trovisi al primo verticale, o presso: se l'elemento più incerto è l'ora, come quasi sempre avviene, sarà consiglio migliore calcolare l'altezza per un istante non molto lungi dal meridiano.

LEZIONE XLIV.

Dell'angolo orario.

533. Intendendosi per angolo orario quello fatto al polo dal meridiano celeste del luogo, col cerchio di declinazione che passa per l'astro in un dato istante qualunque, sarà esso misurato dall'arco di equatore che vi corrisponde, e verrà perciò rappresentato dalla differenza tra l'ascensione retta del meridiano, e l'ascensione retta dell'astro, nel dato istante (309). Ma se le ascensioni rette degli astri possono ottenersi dalle corrispondenti tavole; quella del meridiano è d'uopo dedurla da quella del sole.

534. *Dell'ascensione retta del meridiano.* Contandosi il tempo in ore solari, cominciando dal mezzodì, è chiaro che a mezzodì trovandosi il sole al meridiano, questo in tale istante, cioè a zero ora avrà la medesima ascensione retta del sole che nel presente ragionamento contempleremo espressa in ore (103, 309 e 314); ed in tutti gl'istanti successivi del giorno, il meridiano avrà di ascensione retta quella che avea il sole a mezzodì più l'intervallo di tempo v. scorso da tal mezzodì, e più la parte proporzionale di detto intervallo, sulla quantità di cui il sole cambia di ascensione retta nella durata del giorno vero proposto.

Rappresenti *aCbD* l'equatore terrestre (*fig. 78*) MANB l'equatore celeste, P il polo, e supponiamo per ora di essere al dì 23 dicembre, in cui il tempo vero e il tempo medio si agguagliano. Allorchè si troverà il sole S nel piano del meridiano MN dell'osservatore in longitudine *a* sulla terra, la quale gira sul proprio asse da occidente in oriente nel senso *aCbD*, si verificherà insieme il giorno vero ed il giorno medio; e se ♈′ e ♎′ rappresentano i punti equinoziali, l'ascensione retta sì del sole S che del meridiano MN sarà rappresentata dall'arco ♈′ NB ♎′ M. E se dopo cinque ore (p. e.) il meridiano terrestre *ab*, per effetto della rotazione è passato alla posizione *a′b′*, per la qual cosa il meridiano celeste MN corrisponde alla posizione AB, l'ascensione retta del meridiano in tale istante, sarà eguale alla somma degli archi ♈′ N ♎′ BM, *AR* ☉ a mezzodì, ed MA eguale ad ore cinque; e quindi sarà dinotata dall'arco ♈′N ♎′MA.

535. Or siano ♈ e ♎ i punti equinoziali, e la figura rappresenti la posizione del 7 marzo. Il mezzodì medio si verifica allora in S, mentre il mezzodì vero si avvera in *s*, e l'arco S*s*, secondo la *C. T.* del 1840 sarà di $+ 0^h\ 11'\ 12'',91$ dinotato col titolo *tempo medio a mezzodì vero*; cioè nell'istante del mezzodì vero è scórso il mezzodì medio di $11'\ 12'',91$ di tempo medio. Sia ora M′ il punto dove si avvera il mezzodì medio nel giorno 8 marzo ed *s′* quello ove, giunto il meridiano, avviene il mezzodì vero, in conseguenza della traslazione avuta dalla terra nella sua orbita. Se gli archi MM′ ed *ss′* fossero eguali, per la stessa ragione che l'arco M ♈ AN ♎ BMM′, attesa la traslazione della terra, è uguale sempre a 24 ore medie, sarebbe l'altro arco *sop*S*ss′* eguale sempre allo stesso giorno vero. Ma essi non sono costanti, MM′ perchè quantunque la terra vien supposta percorrere costantemente $0°\ 59'\ 08''$ nella sua orbita, pure per la inclinazione dell'equatore al piano dell'ecittica, dovrà corrispondere a questo arco costante di eclittica, un arco sempre diverso di equatore, o sia di ascensione retta, secondo i diversi stadî dell'orbita ne' quali pel suo movimento di traslazione trovasi la terra. Così nelle vicinanze degli equinozî l'arco di equatore compreso fra due cerchi di declinazione che passano per gli estremi di un arco di eclittica di $0°\ 59'\ 08''$, sarà minore di questo; e ne

sarà maggiore nelle vicinanze de' solstizî. Ciò che vuol dire, tradotto in tempo, l'aumento diurno dell'*AR* ☉ sarà minore di 3′ 56″,32 nelle vicinanze degli equinozî, e ne sarà maggiore presso i solstizî: andrà esso crescendo dall'equinozio circa sino a presso il solstizio, e decrescendo da questo a quello. Ed *ss′* perchè tal arco non solo è variabile per l'indicata ragione, ma per l'altra ancora della ineguaglianza del moto effettivo della terra nella sua orbita: ineguaglianza che supporremo proporzionale al tempo nell'intervallo di un giorno. Quindi se dinoteremo con t la differenza dell'equazioni di due giorni medî continui; la differenza dell'equazioni di due giorni veri consecutivi sarà rappresentata da $t \pm$ il quarto termine in ordine a 24 ore, all'equazione del tempo sul mezzodì vero, e alla differenza t delle due equazioni contigue. Cioè nel nostro caso (espressione tutte di tempo medio)

$$24^h : 11' \; 12'',91 :: 14'',96 : x = 0'',1162.$$

E siccome il valore di x servir deve indifferentemente per tutte le 24 ore del giorno; e $t = 14'',96$ si è la somma totale de' differenziali di equazione dal mezzodì 7 marzo sino al mezzodì 8 marzo, sarà conducente all'esattezza fare il valore di t uguale alla semisomma delle differenze delle equazioni avute a mezzodì 7, ed a mezzodì 8: cioè

$$24^h : 11' \; 12'',91 :: 14'',755 : x = 0'',1149165$$

e ritenendo solo due cifre decimali, diremo $x = 0'',11$. La differenza delle diurne equazioni di tempo nel nostro caso è positiva, ed in questa ipotesi continueremo il discorso. Intanto è chiaro che le ore di tempo vero non possono essere eguali a quelle di tempo medio che solamente nei quattro giorni delle uguaglianze de' giorni medio e vero (419).

Se adunque una espressione di tempo vero *so* vuolsi convertire in espressione di tempo medio, basterà aggiungervi *s*S, *equazione sul mezzodì vero,* o sia *tempo medio a mezzodì vero*; perchè la *C. T.* la somministra appunto in tempo medio. Ma se una quantità di tempo medio S*o* dev'esser convertita in tempo vero, si dovrà togliere non solo l'arco S*s*, ma ancora $x = 0'',11$ parte proporzionale che gli corrisponde sulla differenza delle equazioni avvenuta in 24 ore. E riepilo-

gando diremo, essere

in s { 24 ore di tempo vero
24^h 11′ 12″,91 di tempo medio

in S { 24 ore di tempo medio
23^h 48′ 46″,98 di tempo vero del giorno precedente.

La quantità $x = 0'',11$ è data dalla *C. T.* nella sua tavola X, col segno che nelle diverse circostanze le appartiene, ed è la medesima da noi riportata a tavola XXI la quale può valere per tutti gli anni; e quindi ci siamo serviti di dire (437) e qui ne giova ripetere

1840 a 7 marzo	t. m. a m. v. =	+ 0 11′ 12″,91	*equazione sul mezzodì vero*
	Cor. (tav. XXI) =	+ 00 ,11	*correzione che spesso si tralascia*
	t. v. a m. m. =	— 0 11 13 ,02	*equazione sul mezzodì medio*

536. Da ciò si deduce che per avere l'*AR* del meridiano in t. m. per un'ora qualunque A, cioè per avere in t. m. il valore dell'angolo ♈ PA, o sia l'arco ♈ A bisognerà aggiungere l'ora t. m. S*o* o vero AM all'*AR* ☉ a mezzodì medio ♈ A ≏ BM, più la p. p. di MA, sul cangiamento di ascensione retta in 24 ore MM′.

E bramando in espressione di tempo vero l'ascensione retta del meridiano nell'istante medesimo A, si dovrebbe aggiungere all'arco ♈ AN ≏ BME l'altro arco EA, più le p. p. relative ad *ss′* cangiamento di *AR* in 24 ore, donde si avrebbe nuovamente ♈ A. Ma siccome la *C. T.* somministra solamente l'arco ♈ AN ≏ BM, cioè *AR* ☉ a mezzodì medio; così pare a prima vista che debba pria rinvenirsi in t. m. l'*AR* del meridiano, e poscia da questa, mediante l'equazione corrispondente all'ora proposta, pervenire all'*AR* di esso meridiano. Se però si rifletta, che aggiungendo l'arco AE all'altro ♈ AN ≏ BM, si ha una tale ascensione retta del meridiano che aggiuntovi EM, o sia S*s*, o sia il *tempo medio a* m. v. darebbe in t. m. l'*AR* del meridiano per l'istante dato, si conchiuderà facilmente allora esser quella l'*AR* vera del meridiano per lo medesimo istante.

Esempio.

Si domanda l'ascensione retta del meridiano di Parigi a $5^h\ 34'\ 55'',68$ t. m. o sia a $5^h\ 23'\ 46'',14$ l. v. il giorno 7 marzo 1840.

AR ⊙ a mezzodì m. 7 marzo a Parigi	$23^h\ 12'\ 15'',85$
Aumento in $24^h = 3'\ 41'',59$	
p. p. per l'ora data $5^h\ 34'\ 55'',68$	+ 51 ,55
AR ⊙ per l'istante	23 13 07 ,40
Ora l. m. data	5 34 55 ,68
AR del meridiano all'istante dato in t. m.	4 48 03 ,08
Equazione sul mezzodì m.	— 11 09 ,54
AR del meridiano.	4 36 53 ,54

o pure per aver l'*AR* del meridiano direttamente

AR ⊙ a mezzodì m. 7 a Parigi	$23^h\ 12'\ 15'',85$
Aumento in 24 ore $= 3'\ 41'',59$	
p. p. per l'ora data $5^h\ 34'\ 55'',68$ t. m.	+ 51 ,55
AR ⊙ per l'istante dato	23 13 07 ,40
Ora t. v. data	5 23 46 ,14
AR del meridiano.	4 36 53 ,54

Sicchè, se all'*AR* ⊙ m. *più l'aumento* relativo all'ora t. m. data, aggiungeremo l'ora di tempo medio, avremo in t. m. l'*AR del meridiano*; e se in vece aggiugneremo l'ora di tempo vero, otterremo l'*AR del meridiano direttamente*, ch'è appunto quella di cui abbisogniamo trattando di angoli orarî.

Perchè intanto si possa formare una idea chiara di quanto abbiamo detto a questo proposito, non sarà forse inutile, assegnare i diversi valori degli archi della figura, secondo il riportato esempio.

♈ AN ♎ BM =	$23^h\ 12'\ 15'',85$
♈ AN ♎ BM′ =	23 15 57 ,44
MM′ =	0 03 41 ,59
ME =	0 11 12 ,91
M′E′ =	0 10 57 ,95
ME — M′E′ = t =	0 00 14 ,96
x =	+ 00 00 ,11
MA =	5 34 55 ,68
EA =	5 23 46 ,54

537. Ed in generale la differenza di due ascensioni rette, essendo espressa da un arco di equatore, la cui valutazione non è dipendente

dal mezzodì medio nè dal mezzodì vero, sarà essa sempre un arco di tempo vero, sia che rappresenti la differenza di due ascensioni rette medie, sia che rappresenti la differenza di due ascensioni rette vere; dappoichè l'ascensione retta *media*, altra cosa non è che l'ascensione retta *vera* dell'astro all'istante del *mezzodì medio*.

538. Se adunque all'istante che l'ascensione retta del meridiano è ♈A (*fig. 78*) siavi un astro ♀ la cui ascensione retta sia ♈x, ed xP sia la proiezione del cerchio di declinazione che passa per lo medesimo, avremo che xA differenza tra ♈A ed ♈x sarà il valore dell'angolo orario xPA; e se l'ascensione retta dell'astro fosse ♈x', similmente la differenza degli archi ♈x' ed ♈A dinoterebbe l'angolo orario APx'. Vale a dire: tra l'*AR* del meridiano calcolata per un dato istante, e quella di un astro qualunque per lo istante medesimo, *la differenza positiva dinoterà l'angolo orario dell'astro* nel medesimo istante.

Se l'*AR* del meridiano è maggiore di quella dell'astro, l'angolo orario sarà all'Ovest; e noi gli daremo segno positivo per indicare che il meridiano nel dato istante ha più ascensione retta dell'astro. Quando per lo contrario l'*AR* del meridiano è minore di quella dell'astro, daremo all'angolo orario il segno negativo. E ciò ancora in armonia del modo nel quale contiamo le ore, le quali nelle ore pomeridiane esprimono angoli orarî positivi perchè minori di 180°, e nelle ore antimeridiane dinotano angoli negativi del giorno astronomico corrente.

539. Da ciò siegue, che ottenendo dal calcolo, mercè l'altezza osservata, l'angolo orario di un astro, che non sia il sole, se dopo avervi posto il segno — quando è all'Est, o il segno + quando è all'Ovest, passeremo ad addizionarlo algebricamente con l'*AR* dell'astro, la quale avrà sempre il segno +, otterremo l'*AR* del meridiano per l'istante dato; quindi se da questa torremo l'*AR* ☉ calcolata per l'istante medesimo, perverremo alla conoscenza dell'ora dell'osservazione, al modo istesso che più direttamente si ottiene dall'altezza del sole.

Quando però la conoscenza dell'angolo orario servir dovesse a calco-

lare la longitudine della nave, non sarebbe cosa prudente dirigere l'osservazione ad una stella, se non quando la fosse visibile al crepuscolo; perciocchè la notte non può mai vedersi l'orizzonte con precisione. Nè possiamo in tal caso avvalerci con sicurezza dell'altezza di uno de' pianeti; non essendo data dalla *C. T.* la loro *AR* in tutti i giorni, nè con tutta la necessaria precisione, ma solamente ad intervalli di molti giorni, e solo in ore e minuti primi; mentre d'altronde essi riuscirebbero assai opportuni, poichè possono osservarsi durante i crepuscoli. Rimane adunque a poterci servire solamente di un angolo orario del sole o della luna, quando trattisi di calcolare la longitudine della nave, come faremo conoscere quando sarà opportuno. Per ora occupiamoci del modo di calcolare l'angolo orario, che corrisponde ad una data altezza, e di dedurne l'avanzo o il ritardo di un oriuolo.

540. *Angolo orario in generale.* Se nel triangolo sferico ZPS (*fig.* 79) son noti ZP $= l$ per la latitudine, SP $= d$ per la declinazione, e ZS $= a$ per l'altezza, per conoscere il valore dell'angolo orario P, faremo

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen } \frac{1}{2} s \text{ sen } (\frac{1}{2} s - a)}{\text{sen } l \text{ sen } d}} \quad (277).$$

541. *Angolo orario del sole.* Se l'astro di cui siasi calcolato l'angolo orario è il sole, l'angolo orario dinoterà, ridotto in tempo, le ore t. v. scorse dal suo passaggio al meridiano fino all'istante dell'osservazione, se questo è nel p. m., e se invece l'osservazione fosse stata fatta nell'a. m. dinoterà in t. v. quanto manca per l'appulso del sole al meridiano. Questo calcolo è uno de' più frequenti ed utili nella navigazione: serve a regolare l'oriuolo non solamente, ma con piccola variazione di circostanza serve a fornire la longitudine, come in seguito vedremo.

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo per istima in latitudine 38° 42′ N e longitudine 13° 43′ 43″,2 OP; avendo piedi 20 di elevazione ed un sestante che richiede di rettifica $\mp$ 2′ 30″; si è osservata la mattina a 7^h 06′ t. v. mediante un oriuolo regolato al sorgere del sole, un' altezza ☉ 9° 20′. Prendendo due confronti al cronometro, si è trovato che all' istante dell' osservazione esso segnava 8^h 20′ 37″,7; e inoltre il barometro 0^m,766, ed il termometro centigrado + 18°. Si domanda la relazione del cronometro rispetto al tempo vero, e al tempo medio del luogo.

Istante dell' osservazione.

	Mostra		Cronometro	
1.° confronto	7^h 14′ 26″,2 . .	7^h 14′ 26″,2 . .	8^h 13′ 00″ . .	8^h 13′ 00″
Osservazione	. . . .	7 22 05 ,2 . . .	. . . .	φ
2.° confronto	7 23 27 ,7 . .	. . . .	8 22 00	
	9 01 ,5 :	7 39 ,0 : :	9 00 :	x = 0 07 37,7
Ora del cronometro all' istante dell' osservazione			. . . . .	φ = 8 20 37,7

Ora di Parigi.

Ora astr. a bordo il 6 t. v.		19^h 06
Longitudine in tempo		+ 0 54 54,88
Ora *stimata* di Parigi, t. v.		20 00 54,88
t. m. a m. v. il 6 . .	= 11 27,46	
diff. in 24 ore = 14″,55		
p. p. per 20^h 01′. . . .	— 12,13	
equaz. per l' istante . . .	11 15,33	0 11 15,33
Ora *stimata* t. m. a Parigi.		20 12 10,21

Declinazione ☉

Il dì 5 marzo	— 5° 54′ 18″,1		
		+ 23′ 15″,1	
6 marzo	— 5 31 03 ,0		+ 0′ 04″,4
		+ 23 19 ,5	
7 marzo	— 5 07 43 ,5		

Declinazione il dì 6	— 5° 31′ 03,0
p. p. per 20^h 12′ sopra 23′ 19″,5	+ 0 19 37,91
Declinaz. per la diff. 1.ª	— 5 11 25,09
Per $\frac{1}{2} \times 20^h = 10^h$, e per + 4″,4	— — 00,3
Declinaz. per diff. 2.ª	— 5 11 25,39
d =	95 11 25,39

Altezza ☉

Altezza strumentale ☉	9° 20′ 00″,0
Rettifica	+ 02 30 ,0
Altezza osservata ☉	9 22 30 ,0
Depressione per 20 piedi	— 04 32 ,0
Altezza apparente ☉	9 17 58 ,0
Rifr. — parall. . . — 5′ 34″,0 766 barom. . . . + 0 02 ,7 + 18° termom. . . — 0 09 ,9	— 05 41 ,2
Altezza *vera* ☉	9 12 16 ,8
Semidiametro centrale	+ 16 08 ,0
Altezza *vera* ☉	9 28 24 ,8
	$a =$ 80 31 35 ,2
Latitudine	38° 42′
	$l =$ 51 38

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} s \text{ sen } (\tfrac{1}{2} s - a)}{\text{sen } l \text{ sen } d}}$$



$l =$	51° 18′ 00″,0	colog sen =	0.1076658
$d =$	95 11 25 ,4	colog sen =	0.0017844
$a =$	80 31 35 ,2		
$s =$	227 01 00 ,6		
$\tfrac{1}{2} s =$	113 30 30 ,3	log sen =	9.9623701
$s - a =$	32 58 55 ,1	log sen =	9.7358983
			19.8077186
$\tfrac{1}{2}$ P =	36 44 03 ,25	log cos =	9.9038593
	× 8		
P =	4h 53′ 52″,43		
	7 06 07 ,57	tempo vero della nave	
	+ 11 15 ,33	equaz. sul mezzodì v. per 20h 12′	
	7 17 22 ,90	tempo medio della nave	
	8 20 37 ,70	Ora segnata dal cronometro	
	1 03 14 ,8	*Avanzo del cronometro sul* t. m. *del luogo*	
	1 14 30 ,13	*Avanzo del cronometro sul* t. v. *del luogo*	

542. *Angolo orario della luna.* Se l'astro di cui siasi osservata l'altezza non fosse il sole sarà d'uopo calcolarne l'ascensione retta per l'istante prossimo dato. Con questa e con l'angolo orario calcolato si dedurrà l'AR del meridiano per l'istante in cui si è fatta l'osservazione, e quindi l'ora della medesima.

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo in latitudine 38° 42′ N e longitudine 14° 12′ 31″,2 OP, avendo piedi 20 di elevazione ed un sestante che richiede di rettifica + 3′, si è osservata un' altezza ☽ 58° 43′ 40″ a circa 4ʰ 38′ 05″,6 t. m. della sera. Per mezzo de' confronti si è dedotto che in tale istante il cronometro segnava 5ʰ 43′ 25″,96; ed inoltre il barometro indicava 0ᵐ766, ed il termometro centigrado + 18°. Si domanda la relazione del cronometro rispetto al tempo vero, e al tempo medio del luogo.

Ora di Parigi.

Ora t. m. a bordo il 7	4ʰ 38′ 05″,6
Longitudine in tempo	0 56 50 ,08
Ora t. m. a Parigi	5 34 55 ,68

AR ☉

AR ☉ a m. m. di Parigi il 7 marzo	23ʰ 12′ 15″,85
Aumento in 24 ore = 3′ 41″,59	
p. p. per 5ʰ 35′	+ 51 ,55
AR ☉ per l' istante	23 13 07 ,40

Declinazione ☽

il dì 6 12ʰ	= + 12° 45′ 28″,5		
		+ 3° 00′ 26″,4	
7 00	= + 15 45 54 ,9		− 0° 12′ 41″,6
		+ 2 47 44 ,8	
7 12	= + 18 33 39 ,7		− 0° 15′ 45″,7
		+ 2 31 59 ,1	
8 00	= + 21 05 38 ,8		
		somma =	− 0 28 27 ,3
		½ som =	− 0 14 13 ,65

Declinazione il dì 7	+ 15° 45′ 54″,9
differenza in 12ʰ = 2° 47′ 44″,8	
p. p. per 5ʰ 34′ 55″,68 di Parigi	+ 1 18 01 ,85
Declinazione per la diff. 1.ª	+ 17 03 56 ,75
Per 5ʰ 35′ e per − 14′	+ 01 44 ,45
Per 5 35 e per − 14″	+ 00 01 ,8
Declinazione per la diff. 2.ª	D′ = + 17 05 43 ,00
	d′ = 72 54 17 ,00

AR ☽

il di 6 12ʰ	= 20° 22′ 33″,2		
		+ 6° 43′ 46,6	
7 00	= 27 06 19 ,8		+ 0° 11′ 53″,5
		+ 6 55 40,1	
7 12	= 34 01 59 ,9		+ 0 12 50 ,6
		+ 7 08 30,7	
8 00	= 41 10 30 ,6		
		somma =	+ 0 24 44 ,1
		$\frac{1}{2}$ som =	+ 0 12 22 ,05

AR pel di 7 marzo		27° 06′ 19″,8
diff. in 12ʰ = 6° 55′ 40″,1		
p. p. per 5ʰ 34′ 55″,68 di Parigi		3 13 21 ,58
AR per la diff. 1.ª		30 19 41 ,38
per 5ʰ 35′ e per + 12′ . . .	− 1′ 29″,50	− 01 32 ,17
per 5 35 e per + 22″ . . .	− 0 02 ,67	
AR per la diff. 2.ª		30 18 09 ,21

Altezza vera ☽

Parall. orizz. del luogo e per l'istante	0° 59′ 24″,48
Semidiametro centrale per l'istante	0 16 12 ,69

Altezza strumentale ☽		68° 43′ 40″
Rettifica dello strumento		+ 03 00
Altezza osservata ☽		58 46 40
Depressione per 20 piedi		− 04 32
Altezza apparente ☽		58 42 08
Parall. — rifraz.	+ 30′ 17″,3	+ 30 18
766 barometro	− 00 00 ,3	
+ 18° termometro	+ 00 01 ,0	
Altezza vera ☽		59 12 26
Semidiametro centrale		+ 16 12,69
Altezza *vera* centro ☽	A′ =	59 28 38,69
	a′ =	30 31 21,31

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P' = \sqrt{\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} s \text{ sen } (\tfrac{1}{2} s - a')}{\text{sen } l \text{ sen } d'}}$$

l =	51°	18′	00″	,00	colog sen = 0.1076658
d' =	72	54	17	,00	colog sen = 0.0196251
a' =	30	31	21	,31	
s =	154	43	38	,31	
$\frac{1}{2} s$ =	77	21	49	,15	log sen = 9.9893515
$\frac{1}{2} s\ a'$ =	46	50	27	,84	log sen = 9.8629994
					somma = 19.9796418
$\frac{1}{2} P'$ =	12	21	24	,13	colog cos = 9.9898209
P' =	+24	42	48	,26	Angolo orario *Ovest*
	+30	18	09	,21	*AR* ☽
	+55	00	57	,47	*AR* del meridiano in gradi
			×	4	
	3ʰ	40′	03″	,83	*AR* del meridiano in tempo
	− 23	13	07	,40	*AR* ☉ per l' istante
	4	26	56	,43	Ora t. v. a bordo
	0	56	50	,08	Longitudine in tempo
	5	23	46	,51	t. v. a Parigi
					t. m. a m. v. 11 12,91
					diff. in 24 ore = − 14″,96
					p. p. per 5ʰ 24′ . . . . . . − 03,37
	+	11	09	,54	equazione sul m. v. per l'istante
	4	38	05	,97	Ora t. m. a bordo
	5	43	25	,96	Ora del cronometro
	1	05	19	,99	*Avanzo del cronometro sul* t. m.
	1	16	29	,53	*Avanzo del cronometro sul* t. v.

Questo calcolo, essendo l'inverso di quello a pagina 299 e seguenti avrebbe dovuto dare per tempo *vero* della nave all' istante dell' osservazione 4ʰ 26′ 56″,06, e non già come abbiamo da esso ottenuto 4ʰ 26′ 56″,43; ma sarebbe stato necessario che il sestante avesse fatto distinguere un'altezza strumentale di 58° 43′ 41″,71, la qual cosa non è possibile; perocchè lo strumento dà i 20″, e quindi ne la fa leggere di 58° 43′ 40″. Intanto, siccome la differenza dal vero non è in tempo che 0″,37 possiamo conchiudere che uno strumento il quale dia i 20″ è a sufficienza esatto, perchè non possa cadersi in errori di rilievo.

543. Quando la longitudine *stimata* è molto discorde dalla vera, non potendosi avere l'istante preciso per lo quale è d'uopo calcolare l'*AR*

e la declinazione della luna, di cui i movimenti sono tanto irregolari, non potrà ottenersi da questo calcolo, quel grado di esattezza che regolarmente si desidera, in così delicata circostanza, quale si è quella di conoscere l'andamento del cronometro; e quindi essendo in pelago sarà meglio avvalersi dell'altezza del sole. Ma trovandosi la nave in una stazione di cognita longitudine, potrà il calcolo dell'angolo orario della luna dare ottimi risultamenti, potendosene osservare l'altezza ne' preziosi momenti del giorno ne' quali l'orizzonte è per lo più chiaramente terminato; cioè alla fine del crepuscolo mattutino, o al cominciare del crepuscolo vespertino.

544. *Angolo orario di un pianeta.* Quantunque l'ora dedotta dal calcolo mediante l'altezza di un pianeta, per quanto abbiamo già detto (539) non possa riuscire della necessaria esattezza, allorquando si trattasse di verificare l'andamento del cronometro, pure non sarà stimato superfluo l'esporne il tipo di calcolo.

Esempio.

Il dì 22 marzo 1840 alle 5^h 36′ t. m. della mattina, essendo in lat. 40° 51′ N, e longitudine 60° OP, si è osservata un'altezza del lembo inferiore di Venere di 6° 09′ 40″ Est, avendo l'occhio 17 piedi di elevazione, e con un sestante che richiede di rettifica 2′; si domanda il rapporto dell'oriuolo sul t. v. e sul t. m. del luogo.

Ora di Parigi.

Ora astr. t. m. a bordo il 21		17^h 36′ 00″,00
Longitudine in tempo.		4 00 00 ,00
Ora astr. t. m. a Parigi il 21		21 36 00 ,00
t. m. a m. v. il 21	7′ 16″,04	
Correz. (tav. XXI)	+ ,09	
t. v. a m. m.	7 16 ,13	
Differenza in 24 ore = 18″ 40		
p. p. per 21^h 36′	− 16 ,56	
equazione per l'istante	6 59 ,57 . .	− 06 59 ,57
Ora astr. t. v. a bordo.		17 29 00 ,43

AR ☉ e ♀

AR ☉ a m. m. il 21 a Parigi	$00^h\ 03'\ 16'',34$
Aumento in 24 ore = 3′ 38″ 16	
p. p. per $21^h\ 36'$	+ 03 16 ,34
AR ☉ per l'istante	00 06 47 ,05
AR ♀ il 19 a m. m. a Parigi	$21^h\ 54'\ 00'',00$
Aumento in 6 giorni = 29′	
p. p. per $2^g\ 21^h\ 36'$	+ 14 01 ,00
AR ♀ per l'istante	22 08 01 ,00

Declinazione ♀

Declinazione ♀ il 19 a m. m. a Parigi —	$13°\ 31'\ 00'',00$
Diminuzione in 6 giorni = 2° 21′	
p. p. per $2^g\ 21^h\ 36'$ +	1 08 04 ,20
Declinazione ♀ per l'istante —	12 22 55 ,40
d =	102 22 55 ,40

Altezza ♀

Parallasse orizzontale	6″,24
Semidiametro centrale	5 ,96

Altezza strumentale	6° 23′ 40″
Rettifica	— 02
Altezza osservata	6 21 40
Depressione per 17 piedi	— 4 10
Altezza apparente	6 17 30
Semidiametro centrale	+ 05 ,96
Altezza apparente centro	6 17 35 ,96
Rifrazione	— 08 09 ,75
Altezza prossima centro	6 09 26 ,21
Parallasse in altezza	+ 6 ,21
Altezza *vera* del centro	6 09 32 ,42
a =	83 50 27 ,58

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen} \tfrac{1}{2} s \,.\, \text{sen} \left(\tfrac{1}{2} s - a \right)}{\text{sen}\, l \;\text{sen}\, d}}$$

$l =$	49°	39′	00	,00	colog sen =	0.1179860
$d =$	102	22	55	,40	colog sen =	0.0102213
$a =$	83	50	27	,58		
$s =$	235	52	22	,98		
$\frac{1}{2} s =$	117	56	11	,49	.. log sen =	9.9461904
$\frac{1}{2} s - a =$	34	05	43	,91	.. log sen =	9.7486333
					somma =	19.8250310
$\frac{1}{2} P =$	35	20	46	,13	.. log cos =	9.9115155
			× 8			
—	4ʰ	42′	46″	,15	Angolo orario *Est* ♀	
+	22	08	01	,00	*AR* ♀ per l'istante	
+	17	25	14	,85	*AR* del meridiano	
—	0	06	47	,05	*AR* ☉ per l'istante dato	
	17	18	27	,80	Ora astr. t. v. a bordo il dì 21	
	4	00	00	,00	Longitudine in tempo	
	21	18	27	,80	Ora astr. t. v. a Parigi	
					t. m. a m. v. il 21 = 7′ 16″,04	
					diff. in 24ʰ = 18″,40	
					p. p. per 21ʰ 18′. . . — 16 ,33	
		6	59	,71	equaz. sul m. v. per detta ora	
	17	25	27	,51	Ora astr. t. m. a bordo	
	17	36	00	,00	Ora dell' oriuolo	
	00	10	32	,49	*Ritardo dell' oriuolo sul* t. m.	
	00	17	32	,20	*Ritardo dell' oriuolo sul* t. v.	

545. *Angolo orario di una stella.* Allorchè vuolsi l'ora della nave mediante l'altezza di una stella, non sarà necessario di tener conto dell'ora per la quale rinvenire gli elementi del calcolo, perocchè questi nella durata di un giorno non cambiano di quantità che meriti di esser valutata; ma solamente ce ne avvaleremo per calcolare l'*AR* ☉ convenevolmente.

Esempio.

Il dì 1.° luglio 1840, essendo in latitudine 26° 42′ N, e longitudine 14° 56′ OP, si è osservata l'altezza di Antares 34° 20′ 40″ verso l'Ovest alle ore 11 04′ 10″ t. m. con un sestante che richiede di rettifica + 1′ 40″, ed avendo 25 piedi di elevazione dell'occhio; si dimanda di quanto l'oriuolo avanza o ritarda sul tempo medio e sul tempo vero del luogo.

Ora di Parigi.

Ora t. m. a bordo	11^h 04′ 10″,00
Longitudine in tempo	59′ 44″,00
Ora t. m. di Parigi.	12 03 54 ,00

AR ☉

AR ☉ a mezzodì m. di Parigi . . .	. 6^h 41′ 51″,84
Aumento in 24 ore = 4′ 08″,04	
p. p. per 12^h 03′ 54″	2 04 ,69
AR ☉ per l'ora data.	6 43 56 ,53
AR ★	16^h 19′ 37″,56
Declinazione ★. . . . . —	26° 04′ 21″,30
$d =$	116 04 21 ,30

Altezza ★

Altezza strumentale	34 20 40 ,00
Rettifica dello strumento	+ 01 40 ,00
Altezza osservata	34 22 20 ,00
Depressione per 25 piedi.	— 05 04 ,00
Altezza apparente.	34 17 16 ,00
Refrazione.	— 01 25 ,00
Altezza *vera* ★	34 15 51 ,00
$a =$	55 44 09 ,00

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s \,.\, \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} s - a)}{\operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}}$$

$l =$	63°	18′	00	,00	colog sen =	0.0489680
$d =$	116	04	21	,30	colog sen =	0.0466085
$a =$	55	44	09	,00		
$s =$	225	06	30	,30		
$\frac{1}{2} s =$	112	33	15	,15	.. log sen =	9.9654450
$\frac{1}{2} s - a =$	56	49	06	,15	.. log sen =	9.9226942
					somma =	19.9837157
$\frac{1}{2} P =$	11°	03	36	,34	.. log cos =	9.9918578
				× 8		
$P = +$	1^h	28′	28″	,84	Angolo orario Ovest ★.	
+	16	19	37	,56	*AR* ★	
+	17	48	06	,40	*AR* del meridiano	
−	6	43	56	,53	*AR* ☉ per l'ora data	
	11	04	09	,87	Ora t. v. a bordo	
		59	44	,00	Longitudine in tempo	
	12	03	53	,87	Ora t. v. a Parigi	
					t. m. a m. v. a Parigi 0^h 3′ 28″,53	
					diff. in 24 ore = 11″,49	
					p. p. per 12^h 4′ . . . . + 05 ,77	
		3	34	,30	equazione per l'ora data	
	11	07	44	,17	Ora t. m. a bordo	
	11	04	10	,00	Ora dell'oriuolo	
	0	03	34	,17	Ritardo dell'oriuolo sul t. m.	
	0	00	00	,13	Avanzo dell'oriuolo sul t. v.	

546. Sia $L = 0^\circ$,

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen} \tfrac{1}{2} s \, \text{sen} (\tfrac{1}{2} s - a)}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d}}, \text{ o pure}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\text{sen} \tfrac{1}{2} (a + 90^\circ + d) \, \text{sen} \tfrac{1}{2} (90^\circ + d - a)}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d},$$

moltiplicando per 2 e ponendo $90^\circ + d = m$, diverrà

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{2 \, \text{sen} \tfrac{1}{2} (m + a) \, \text{sen} \tfrac{1}{2} (m - a)}{\text{sen} \, d}$$

$$= \frac{\cos a - \cos m}{\text{sen} \, d} \quad (274,45)$$

$$= \frac{\cos a}{\text{sen} \, d} - \frac{\cos (90^\circ + d)}{\text{sen} \, d} = \frac{\cos a}{\text{sen} \, d} + \frac{\text{sen} \, d}{\text{sen} \, d}$$

$$= \frac{\cos a}{\text{sen} \, d} + 1, \text{ e finalmente}$$

$$\cos P = \frac{\text{sen A}}{\cos D} \; (274,49).$$

Sicchè, allorquando la latitudine è zero, il coseno dell'angolo orario è uguale al seno dell'altezza diviso pel coseno della declinazione (524).

547. Se $D = 0^\circ$ si avrà allo stesso modo $\cos P = \frac{\text{sen A}}{\cos L}$. Vale a dire, se la declinazione è zero, sarà il coseno dell'angolo orario, eguale al seno dell'altezza diviso pel coseno della latitudine (525).

Ed il calcolo di entrambi queste formole si è molto facile perchè abbisogni di esempio.

548. Sia $A = 0^\circ$, e si ponga $l + d = n$, avremo

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{2 \, \text{sen} \tfrac{1}{2} (n + a) \, \text{sen} \tfrac{1}{2} (n - a)}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d}$$

$$= \frac{\cos a - \cos n}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d} = \frac{-\cos (l + d)}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d}$$

$$= \frac{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d - \cos l \cos d}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d} = 1 - \frac{\cos l \cos d}{\text{sen} \, l \, \text{sen} \, d} = 1 - \cot l \cot d$$

$$\cos P = -\tan L \tan D \; (274,49).$$

Ma noi contiamo le ore da *oriente* in *occidente*, vale a dire nel senso inverso del movimento del meridiano, il quale seguendo la rotazione

della terra, gira intorno all'asse del mondo da *occidente* in *oriente*: per la qual cosa si dovrà cambiare il segno al valore dell'angolo orario e dire $\cos P = \tan L \tan D$; e le ore saranno positive all'Ovest del meridiano, e negative all'Est del medesimo, allorchè sono contate astronomicamente. Per farle sempre positive, bisognerà contare le ore pomeridiane dal semimeridiano superiore o vero da mezzodì, e quelle antimeridiane dal semimeridiano inferiore o sia da mezzanotte; ed allora la medesima equazione $\cos P = \tan L \tan D$ darà l'ora del tramonto, contando l'ora dal semimeridiano superiore; e darà l'ora del sorgere contando dal semimeridiano inferiore: e se l'astro fosse il sole, l'angolo orario ridotto in tempo darà direttamente l'ora del sorgere o tramontare. Ma quando trattisi di un altro astro qualunque, bisognerà prima calcolare l'ora del suo *passaggio al meridiano*, e con questa espressione vuolsi intendere sempre il suo passaggio al semimeridiano superiore; indi da questo istante contare positivamente l'ora del tramonto, e negativamente l'ora del sorgere, per la testè arrecata ragione (539).

Non pensiamo dilungarci sul di più della discussione della equazione $\cos P = \sqrt{\frac{\text{sen} \frac{1}{2} s \text{ sen} \left(\frac{1}{2} s - a \right)}{\text{sen } l \text{ sen } d}}$, perchè il rimanente conduce di nuovo a'risultamenti avuti nel porre a disamina l'equazione relativa al calcolo dell'altezza.

549. *Opportunità dell' osservazione.* Ogni ragione induce a prendere l'altezza dell'astro, quando essa serve a calcolare l'angolo orario, nell'istante che l'astro trovasi a passare pel primo verticale; o almeno allorquando vi è il più presso possibile.

Primo. Perchè trovandosi nel primo verticale la sua velocità in altezza è la massima, e quindi un errore commesso sull'altezza costa meno tempo di quando più lentamente in altezza procede. Infatti, si concepisca che il parallelo descritto dall'astro sia diviso in gran quantità di parti piccolissime ed eguali, che l'astro percorrerà in tempi eguali e tenuissimi; e per tutti i punti delle divisioni si facciano passare de' cerchi di declinazione, de' verticali e degli almucantari. Si avrà un grandissimo numero di triangoli (*fig.* 79) AST, SS'T' che per la piccolezza

potranno essere riguardati come rettilinei. Ed in ciascun triangolo si avrà AS : AT :: R : cos SAT, o sia AS : AT :: R : sen ZAP; ma sen ZAP, pel triangolo sferico APZ, è uguale a $\frac{\text{sen Z} \times \text{sen PZ}}{\text{sen AP}}$, dunque sostituendo avremo

$$AS : AT :: R : \frac{\text{sen Z sen PZ}}{\text{sen AP}}.$$

In tal proporzione gli antecedenti AS ed R sono costanti in tutte le proporzioni simili, che da tutti gl'immaginati triangoletti si verrebbero a cavare. Possono ancora considerarsi costanti sen PZ e sen AP, trattandosi del medesimo luogo; giacchè poco varia la declinazione, e niente la latitudine. Ma il valore di sen Z è assai differente ne'diversi triangoli, o sia ne'diversi istanti del giorno; laonde, quando sen Z sarà il massimo, sarà benanche massimo il lato AT, cioè il movimento in altezza. Vale a dire che quando l'azzimutto è 90°, allora la velocità in altezza è la massima; e che quanto più l'azzimutto si allontana da'90° tanto più la velocità in altezza diminuisce. Da ciò siegue:

1.° Che, se la declinazione è minore e della stessa specie della latitudine, passando allora l'astro pel primo verticale, la sua maggior celerità in altezza avrà luogo quando esso si troverà al primo verticale.

2.° Che la declinazione essendo maggiore e della stessa specie della latitudine, allora non passando l'astro pel primo verticale, la sua maggior velocità in altezza avrà luogo quando si troverà nel verticale tangente al parallelo che descrive; poichè questo sarà il più vicino al primo verticale.

3.° Finalmente che quando la declinazione e la latitudine sono di diversa specie converrà osservare l'altezza, quanto più è possibile presso all'orizzonte, avuto però riguardo alla soverchia rifrazione che s'incontrerebbe allorchè non si attendesse per l'osservazione, che si fosse l'astro di alquanti gradi, intorno a 10°, elevato.

Secondo. Conviene di prendere l'altezza dell'astro allorquando trovasi esso nel primo verticale, o almeno per quanto più è possibile vicino a questo, perchè in tal caso essendo erronea la latitudine o la declinazione, l'errore di ciascuna di esse influisce niente o poco sull'an-

golo orario. E qui ne giova riunire questi due casi di errori, imperciocchè vanno entrambi riguardati nella prima delle analogie differenziali; cioè: l'errore commesso su di un lato d'un triangolo sferico come influisce sull'angolo adjacente; quindi ciò che diremo d'un errore commesso sulla latitudine, s'intenderà detto ancora per l'altro caso con poca differenza, alla quale potrà supplirsi con facilissimo raziocinio.

Abbiamo di già ottenuto dalla prima analogia differenziale (298) $dl : dP :: \text{sen}(l + dl) : \cot Z$. E se invece dell'azzimutto vorremo contemplare l'amplitudine, chiamandola M, avremo $dl : dP :: \text{sen}(l + dl) : \tan M$; ma tan M, quando l'astro è al primo verticale è uguale a zero, dunque ancora l'errore da cui sarà affetto l'angolo orario P, sarà zero; vale a dire che un errore commesso sulla latitudine affatto non influisce in tal caso sull'angolo orario. E siccome, a misura che l'astro si scosta dal primo verticale tan M acquista maggior grandezza, finchè giunto l'astro al meridiano tan M diviene infinita, così l'errore della latitudine tanto più influirà sull'angolo orario, quanto più l'astro dal primo verticale si scosta. Tal ragionamento non giace perfettamente con quello che far si dovrebbe per un errore sulla declinazione; ma questa merita poca attenzione perocchè si ha dalla Conoscenza de' Tempi, mentre la latitudine non si ha in tal caso che dalla stima.

Da ciò è chiaro, che quando vi è intersecazione del parallelo dell'astro col primo verticale del luogo, cioè sempre che la latitudine del luogo è maggiore della declinazione dell'astro, l'istante più vantaggioso all'osservazione si è quello nel quale esso trovisi al primo verticale. Questa osservazione però non è sempre possibile; imperciocchè l'intersecazione del parallelo col primo verticale avverrà nell'emisfero visibile, quando essendo la declinazione dello zenit maggiore di quella dell'astro, sono ambedue della medesima specie; ma quando la specie è diversa, la intersecazione si avrà luogo al di sotto dell'orizzonte.

Ciò premesso: in tutti i luoghi della terra ne'quali possa essere l'osservatore, basta che l'astro al quale si dirige l'osservazione passi pel verticale primario, avverrà che quando poi, per la rotazione della terra, dal primo verticale orientale passerà a corrispondere successivamente a tutti i punti del parallelo che sembra esso descrivere, tan M passerà per tutti i valori possibili fino a che, giunto al meridiano, $\tan M = \tan 90° = \infty$; ed

altrettanto inversamente avverrà passando a corrispondere a tutti i punti del parallelo dal meridiano al primo verticale occidentale dove nuovamente si avrà $\tan M = 0$. Laonde, passando M per gl' infiniti valori da 0° sino a 90°, dovrà trovarsi ancora in un punto nel quale $\tan M$ uguaglia $\operatorname{sen} l$. Chiamiamo *secondo verticale* quello che passa per tal punto: cioè intenderemo per *secondo verticale quello, la tangente della cui amplitudine, è uguale al coseno della latitudine.* Cosicchè dovranno esser da noi contemplate a tal proposito cinque diverse circostanze dell'astro da ciascun canto del meridiano: cioè

1.° Trovandosi l'astro al primo verticale, essendo $\tan M = 0$, l'errore commesso sulla latitudine ne produrrà uno eguale a zero sull'angolo orario.

2.° Quando l'astro è tra il primo ed il secondo verticale, pel valore di $dP = \frac{dl \tan M}{\operatorname{sen}(dl + l)}$, essendo $\tan M$ minore di $\operatorname{sen} l$, sarà il numeratore $dl \tan M$ minore del denominatore $\operatorname{sen}(dl + l)$, e quindi il valore del rotto $\frac{dl \tan M}{\operatorname{sen}(dl + l)}$ minore dell'unità, che in questo caso è dl errore commesso sulla latitudine; e perciò sarà similmente $dP < dl$; o sia l'errore commesso sulla latitudine ne produrrà uno minore sull'angolo orario.

3.° Se l'astro è al secondo verticale, essendo $\tan M = \operatorname{sen} l$, l'errore in latitudine ne produrrà uno eguale sull'angolo orario.

4.° Tra il secondo verticale ed il meridiano, essendo $\tan M > \operatorname{sen} l$, diverrà $dP > dl$; ed ogni errore commesso sulla latitudine ne produrrà uno maggiore all'angolo orario.

5.° Finalmente, se l'astro è infinitamente vicino al meridiano, essendo $\tan M$ pressochè infinita rispetto a $\operatorname{sen} l$, sarà similmente dP pressochè infinito rispetto a dl: vale a dire l'errore commesso sulla latitudine, ne produrrà in tal caso uno grandissimo sull'angolo orario.

E qui è da notare, che giunto l'astro al meridiano, comechè $\tan M$ sia infinita, dl non potrà avere influenza sull'angolo orario, essendo questo allora divenuto zero. E però se l'astro fosse il sole sarà il momento opportuno a determinare lo zero delle ore, quando si abbia uno *strumento di passaggio* debitamente situato a terra; e nel caso di un

altro astro qualunque sarà il momento opportuno a determinarne l'ascensione retta (309).

Terzo. Ancora, finalmente, per un errore commesso sull'altezza fa mestieri osservarla mentre l'astro è al primo verticale; poichè in tal caso l'errore influisce meno sull'angolo orario.

La terza analogia differenziale dà $da : dP :: \text{sen}\, Z : \frac{R^2}{\text{sen}\, l}$. È ben chiaro che $\frac{R^2}{\text{sen}\, l}$ è sempre maggiore di sen Z; per cui da un errore commesso sull'altezza sempre uno maggiore ne deriverà sull'angolo orario. Quando però il sole è al primo verticale, l'angolo Z è di 90°, quindi il suo seno è il massimo, e perciò avrà minor rapporto alla quantità indicata da $\frac{R^2}{\text{sen}\, PZ}$, donde siegue che meno verrà affetto l'angolo P. E divenendo sempre minore il sen Z nell'allontanarsi l'astro dal primo verticale, maggiore sempre più diverrà l'influenza sull'angolo orario, di un errore commesso sull'altezza.

LEZIONE XLV.

Calcolare il passaggio degli astri per lo meridiano e l'ora del loro sorgere e tramontare.

550. Nell'esporre il maneggio della *Connaissance des temps*, abbiamo indicato come può aversi sommariamente l'ora del passaggio della luna e de' pianeti per un meridiano qualunque diverso da quello di Parigi, per lo quale in tali effemeridi viene somministrato; ma ora è d'uopo occuparcene direttamente e con maggior precisione.

Calcolare l'istante del passaggio di un astro per un dato maridiano, altra cosa non è che calcolare l'istante in cui l'astro ed il meridiano proposto hanno la medesima ascensione retta.

Adunque il calcolo sarà breve, se non che, quando non si conosca almeno approssimativamente l'ora del passaggio dell'astro al meridiano, bisognerà servirsi dell'*AR* del meridiano a mezzodì medio, o sia dell'*AR* ☉ a mezzodì m. data dalla *C. T.* (537), in vece dell'*AR* del

meridiano all'ora del passaggio; similmente praticare per l'*AR* dell'astro; indi rifare il calcolo, ritenendo l'ora già trovata, come ora prossima del passaggio, e così tante volte ripetere il calcolo fino ad ottenere la coincidenza delle ascensioni rette del meridiano e dell'astro; poichè solamente in tal caso si avvera che l'astro è nel piano del meridiano. Ad evitare però questo faticoso procedere noi stimiamo ricorrere ad un mezzo che ne farà pervenire facilissimamente allo scopo con quasi tutta la precisione possibile.

531. *Passaggio della luna e di un pianeta.* Chiedendosi il passaggio della luna o di un pianeta per un meridiano qualunque, ne troveremo sommariamente l'ora prossima (498, 499 e 502), e per questa ora calcoleremo le ascensioni rette del meridiano e della luna: esse coincidendo, l'oggetto sarà conseguito; nel caso contrario, procederemo come rilevasi in fine del seguente

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo in longitudine 14° 12′ 31″,2 OP, si domanda l'ora del passaggio del centro della luna al meridiano, in tempo vero.

Passaggio della ☽ il dì 7 a Parigi t. m.		2h	53′	00″	,00
il dì 8. . . . . t. m.		3	48	00	,00
Ritardo in 24 ore.	+	0	55	00	,00
p. p. per longitudine in tempo 56′ 50″,08. .	+	0	02	09	,81
Passaggio prossimo t. m. pel meridiano della nave.		2	55	09	,81
Longitudine in tempo	+	0	56	50	,08
Ora t. m. di Parigi.		3	51	59	,89
equaz. per l'istante sul m. m.	—		11	10	,61
Ora t. v. della nave		2	43	59	,20

Ascensione retta del meridiano.

AR ☉ a mezzodì m. a Parigi il dì 7		23h	12′	15″	,85
Aumento in 24 ore = 3′ 41″,59					
p. p. per 3h 51′ 59″,89	+		00	35	,70
AR ☉ per l'istante.		23	12	51	,55
Ora t. v. della nave.		2	43	59	,20
AR del meridiano.		1	56	50	,75

AR ☽

il dì 6 12ʰ =	20° 22′ 33″,2		
		+ 6° 43′ 46″,6	
7 00 =	27 06 19 ,8		+ 0° 11′ 53″,5
		+ 6 55 40 ,1	
7 12 =	34 01 59 ,9		+ 0 12 50 ,6
		+ 7 08 30 ,7	
8 00 =	41 10 30 ,6		
		somma	+ 0 24 44 ,1
		metà	+ 0 12 22 ,05

AR pel dì 7 marzo.		27° 06′ 19″,8
p. p. sopra + 6° 55′ 40″,1 per 3ʰ 51′ 59″,89 . .		+ 1 06 58 ,13
AR per la diff. 1.ª.		28 13 17 ,93
per 3ʰ 52′ e per 12′	— 1′ 18″,64	— 1 21 ,04
per 3 52 e per 22″	— 0 02 ,40	
AR ☽ per la diff. 2.ª.		28 11 56 ,89
in tempo solare. . .		1ʰ 52′ 47″,79
AR del meridiano. .		1 56 50 ,75
		4 02 ,96 ☽ O.

Il meridiano adunque è già passato all' Est della luna da 4′ 02″,96 ; e però bisogna che l'ora t. v. della nave sia diminuita: si dovrebbe in conseguenza ripetere il calcolo, onde avere l'istante del passaggio con maggiore approssimazione, prendendo per ora t. v. del passaggio 2ʰ 43′ 59″,20 — 4′ 02″,96 = 2ʰ 39′ 56″,24 ; e così seguitare a ripetere il calcolo finchè, si ottenesse l'istante nel quale le due ascensioni rette fossero eguali. Noi in vece proponiamo di fare il seguente criterio.

La differenza incontrata si appartiene a' movimenti in *AR* del meridiano e della luna: in 24 ore il meridiano descrive 360° di *AR*, mentre la luna non ne percorre dal 7 all' 8 marzo che circa 14°; adunque chiamando x l'*AR* del meridiano in una data ora, e y quella della luna per un' ora prossima alla data, in guisachè può supporsi equabilmente percorsa la differenza $x - y$, e di più ponendo 360° $= a$, e 14° $= b$, avremo $a - b : b :: x - y : y =$ quantità di errore appartenente all' *AR* ☽ , e similmente $a - b : a :: x - y : x =$ quantità di errore appartenente all' *AR* del meridiano. Nel presente caso

346 : 14 :: 4′ 02″,96 : y = 9″,83

ed analogamente

346 : 360 :: 4′ 02″,96 : x = 4′ 12″,79 = 4′ 02″,96 + 9″,83,

vale a dire che una delle due proporzioni andrà sempre risparmiata. E sarà meglio eseguire sempre la seconda, perciocchè il valore di $x = 4' \, 12'',79$ è quello che rappresenta la correzione da fare all'ora del passaggio, la quale rimarrà solo affetta della parte proporzionale competente alla differenza tra l'ora prossima e l'ora esatta, sull'aumento di *AR* ☉ nelle 24 ore, che sarà sempre trascurabile non potendo elevarsi che a qualche secondi. Dunque, avendo trovato in questo esempio $x = 4' \, 12'',79$, ed essendo in più l'errore trovato sull'ora del passaggio della luna per lo meridiano, troveremo tale istante con sufficiente precisione, facendo semplicemente la riduzione dell'ora proposta $2^h \, 43' \, 59'',20 - 4' \, 12'',79 = 2^h \, 39' \, 46'',41$ *ora del passaggio richiesto.*

E chi volesse verificare il calcolo con questa ora presa per vera, onde conoscere il grado di approssimazione ottenuto, potrebbe fare la seguente

Pruova.

Ora t. v. della nave	$2^h \, 39' \, 46'',41$
Longitudine in tempo	56 50 ,08
Ora t. v. a Parigi	3 36 36 ,49
equaz. sul mezzodì v.	+ 11 10 ,66
Ora t. m. a Parigi	3 47 47 ,15

AR del meridiano.

AR ☉ a mezzodì m. a Parigi il 7	$23^h \, 12' \, 15'',85$
Aumento in 24 ore $= 3' \, 41'',59$	
p. p. per $3^h \, 47' \, 47'',15$	+ 00 35 ,06
AR ☉ per l'istante dato	23 12 50 ,91
Ora t. v. della nave	2 39 46 ,41
AR del meridiano	1 52 37 ,32

AR ☽

AR pel dì 7 marzo a m. m. a Parigi		$27° \, 06' \, 19'',80$
p. p. sopra $+ 6° \, 55' \, 40'',1$ per $3^h \, 47' \, 47'',15$		+1 05 45 ,37
AR per la diff. 1.ª		28 12 05 ,17
per $3^h \, 48'$ e per $12'$	$- 1' \, 17'',96$	− 01 20 ,36
per $3^h \, 48'$ e per $22''$	$- 0 \; 02 \; ,40$	
AR ☽ per la diff. 2.ª		28 10 44 ,81
in tempo solare		$1^h \, 52' \, 42'',99$
AR del meridiano		1 52 37 ,32
errore trascurabile.		0 00 05 ,67

Sicchè il nostro semplicissimo ripiego è abbastanza preciso per poter meritare di essere adottato, in vece della pena di ripetere tre o quattro volte il calcolo.

552. *Passaggio di una stella.* Per calcolare il passaggio di una stella per lo meridiano, non cangiando essa di ascensione retta nel corso di un giorno, per quantità che meriti esser valutata, diverrà il calcolo assai più semplice. Riguarderemo come ora prossima del passaggio la differenza delle ascensioni rette della stella e del meridiano a m. m.; ma questa è appunto l'*AR* ☉ a m. m. data dalla *C. T.*; e le ore inoltre si contano dal passaggio del meridiano innanti al sole, quindi dovremo costantemente dall' *AR* ★ togliere l'*AR* ☉ per avere l'ora prossima nella quale il meridiano si troverà alla medesima *AR* della stella. E l'ora così trovata è ora prossima, perciocchè manca, ond' esser precisa, la contemplazione della p. p. sull' aumento diurno dell' *AR* ☉ relativamente all'ora del passaggio, che prima non conoscevasi nemmeno prossimamente. E questa p. p. dovendo esser una correzione dell' ora prossima dovrà essere adoperata col segno contrario, cioè sempre col segno negativo.

Volendo esporre la cosa medesima in altri termini, diremo: Dall' *AR* ★ togliendo l'*AR* ☉ a m. m. si avrà l'angolo orario della stella a m. m. cosicchè il meridiano per aver la stella nel suo piano dovrà ancora girare per quante ore di t. v. sono indicate dall' angolo orario. La terra intanto non ha solo il movimento di rotazione, ma tiene altresì il moto di traslazione, in conseguenza del quale le deriva costantemente un aumento variabile di ascensione retta (535) attribuita al sole; dunque il meridiano nel tempo che descrive l'angolo orario riceve intuitivamente un di più di ascensione retta, proporzionale all'aumento in 24 ore; quantità che bisogna in conseguenza togliere dall'angolo orario, per ottenere la espressione dell'ora del passaggio, la quale dinoterà sempre t. v. (537).

L'ora così trovata rimarrà semplicemente affetta della p. p. sull' aumento diurno, corrispondente alla differenza tra l'ora prossima e l'ora esatta del passaggio: affezione che difficilmente si eleva a più di due secondi in tempo.

Esempio.

Nel dì 7 marzo 1840 essendo in longitudine 6° 49′ 45″ OP (a Brest) si domanda l'ora del passaggio di Aldebaran per lo meridiano, in tempo vero.

AR ★ il dì 7 marzo.	4ʰ 26′ 45″,62
AR ☉ a m. m. di Parigi.	23 12 15 ,85
Ora prossima t. v. del passaggio	5 14 29 ,77
Longitudine in tempo	+ 27 19
Ora t. v. di Parigi all'istante del passaggio a Brest. . .	5 41 48 ,77
Aumento dell'*AR* ☉ in 24 ore = 3′ 51″,59	
p. p. per l'ora di Parigi 5 41 47 77	— 52 ,62
Ora t. v. passaggio a Brest	5 13 37 ,15

Se alcuno volesse conoscere fino a qual grado siasi in tal guisa ottenuta la precisione, far dovrebbe la seguente

Pruova.

Ora t. v. del luogo.	5ʰ 13′ 37″,15
Longitudine in tempo	+ 27 19
Ora t. v. a Parigi	5 40 56 ,15
equazione sul m. v. per detta ora.	+ 11 09 ,37
Ora t. m. a Parigi	5 52 05 ,52
AR ☉ a m. m. a Parigi	23 12 15 ,85
Aumento in 24 ore = 3′ 41″,59	
p. p. per 5ʰ 52′ 05″,52	+ 00 54 ,17
AR ☉ per l'istante dato	23 13 10 ,02
Ora t. v. del luogo.	5 13 37 ,15
AR del meridiano	4 26 47 ,17
AR di Aldebaran.	4 26 45 ,62
errore trascurabile.	0 00 01 ,55

553. *Sorgere e tramontare di un astro.* Calcolare l'ora del sorgere e tramontare di un astro, altro non è, generalmente parlando, che calcolare l'angolo orario dell'astro nell'istante che la sua altezza è zero rapporto all'orizzonte di un dato luogo; laonde servendoci della formola cos P = tan L tan D (548) possiamo pervenire al nostro scopo. Siccome però l'è un calcolo che per comodo quotidianamente si eseguisce a bordo, non sarà trovato superfluo se stimiamo trattenerci alquanto su di ciò, per avvertire a certe particolarità che all'uomo di mare sono di sufficiente interesse.

Il metodo più comunemente adoperato in mare per calcolare l'ora del sorgere e del tramontare di un astro, si è quello per mezzo della differenza ascensionale, cioè della differenza tra l'ascensione retta e l'ascensione obliqua di un astro. Rappresenti HZON (*fig.* 80) il meridiano del luogo; EQ la proiezione dell'equatore; ♈ la sezione di ariete; ZN la proiezione del primo verticale; P*p* quella del cerchio orario delle 6 ore; P*sa* il cerchio di declinazione che passa per l'astro nell'istante del suo sorgere o tramontare, se la sua declinazione è della stessa specie del polo elevato; e P*a's'* quello se la sua declinazione è di specie opposta. Nel 1.° caso ♈*a* rappresenta l'ascensione retta, ed ♈*b* l'ascensione obliqua; in conseguenza l'arco *ab* o sia l'angolo *a*P*b* aggiunto ad EP*b* ch'è di 90°, darà l'intero angolo orario ZP*s* dell'istante del sorgere o tramontare dell'astro. E nel 2.° caso la differenza ascensionale *a'b* o sia l'angolo *b*P*a'* tolto da EP*b* darà l'angolo orario ZP*s'* dell'istante del sorgere o tramontare dell'astro. Adunque trovata la differenza ascensionale di un astro, questa aggiunta o tolta da 6 ore, secondochè la sua declinazione è della medesima specie o di specie opposta a quella del polo elevato, darà l'angolo orario del sorgere o tramontare dell'astro. Nel triangolo *sba*, rettangolo in *a*, si ha *abs* complemento della latitudine ed *as* declinazione; n'è d'uopo rinvenire il valore di *ab* che otterremo facendo sen *ab* = tan *as* . cot *abs* (281,2), o sia sen *diff. ascen.* = tan *decl.* ⨯ tan *lat.* Questo mezzo è semplicissimo, ma bisogna avvertire che esso ne dà l'istante in cui il centro dell'astro è effettivamente all'orizzonte senza tener conto di nessuna delle circostanze che ne affettano l'apparenza.

Intanto osserviamo che sen *ab* = tan *as* . cot *abs* si traduce in sen *b*P*s* = tan D tan L, o sia cos *s*PO = tan D tan L = — cos ZP*s* come ancora si ha dal triangolo *s*OP. Vale a dire: quando la declinazione dell'astro è della stessa specie del polo elevato tan D tan L darà l'ora del sorgere minore di sei ore, contata dal semimeridiano inferiore, o sia darà il supplemento dell'angolo orario; e quando la declinazione dell'astro è di specie diversa del polo elevato si avrà — cos *s'*PO = tan D tan L = cos ZP*s'*, cioè l'ora del sorgere sarà maggiore delle sei ore contata dal semimeridiano inferiore e sempre supplemento dell'angolo orario (548).

Per l'ora del tramonto conteremo le ore dal semimeridiano superiore; ed essendo nel primo caso $\tan D \tan L = -\cos ZPs$ l'ora del tramonto sarà più di sei ore dopo dell'passaggio dell'astro al meridiano; e nel secondo caso, essendo $\tan D \tan L = \cos ZPs'$ tramonterà l'astro meno di sei ore dopo il passaggio al meridiano (548).

Sia però la declinazione della medesima specie del polo elevato, sia della specie contraria, l'ora del sorgere sarà il supplemento dell'angolo orario; mentre l'ora del tramonto sarà dinotata dall'angolo orario direttamente.

Ciò non ostante, non sarà necessario calcolare l'orá del passaggio dell'astro pure pel semimeridiano inferiore, e basterà sempre calcolarne il solo passaggio pel semimeridiano superiore. Se trattisi del sorgere dell'astro, si toglierà l'angolo orario del suo sorgere dall'ora nella quale passa per lo meridiano; e quando trattisi del tramonto, si aggiungerà l'angolo orario del suo tramonto a questa medesima ora del passaggio. O ciò ch'è lo stesso, daremo il segno negativo all'angolo orario del sorgere, ed il segno positivo a quello del tramonto.

354. *Sorgere e tramontare vero del sole.* Volendo calcolare l'ora del sorgere o del tramonto vero del sole, non occorrerà calcolare l'ora del suo passaggio al meridiano, stantechè le ore si contano dall'istante appunto in cui il centro del sole trovasi nel piano del meridiano. Allorchè poi il meridiano ha girato di altri 15° verso oriente notiamo essere un'ora del novello giorno astronomico (106), dicendo comunemente avere il sole declinato di 15° verso occidente, e così di seguito. Talchè le ore vengono contate in ordine inverso al movimento del meridiano, ch'è da occidente in oriente: cioè contate dal meridiano al sole o sia, da oriente in occidente, giusta l'antichissimo costume; e non già come a rigore geometrico si dovrebbe, dal sole al meridiano, vale a dire da occidente in oriente nell'ordine medesimo delle ascensioni rette. Da ciò deriva che seguendo il sistema antico o pure il moderno, saranno sempre positivi gli angoli orarî dal mezzodì alla mezza notte, e negativi quelli dalla mezza notte al mezzodì, allorchè si considera il giorno astronomico.

Col sistema tolemaico si direbbe: Il sole procede pel moto diurno da

oriente in occidente, le ore contansi similmente da oriente in occidente, dunque per 180° o sia per gli angoli orarî delle prime 12 ore si avrà il segno positivo; e pel resto della circonferenza, cioè per le 12 ore da mezza notte a mezzodì si avrà il segno negativo rispetto al mezzodì prossimo. E col sistema moderno si dirà: Il meridiano gira da occidente in oriente, in questo medesimo senso contansi le ascensioni rette, dunque gli angoli orarî delle prime 12 ore avranno il segno positivo, e quelli delle rimanenti il segno negativo riguardo al mezzodì prossimo.

Quindi abbiamo stabilito gli angoli orarî a *ponente* del meridiano avere il segno positivo, e quelli a *levante* il segno negativo.

Questa differenza del segno, intanto, nasce solo da che manchiamo della diretta espressione geometrica di un angolo maggiore di 180°; per la qual cosa, se dall'espressione rappresentante un'ora antimeridiana togliamo $180° = 12^h$, il residuo sarà positivo, ma contato dalla mezza notte, giusta gli usi civili.

Così, essendo il sole a levante del meridiano per un angolo orario di 45°, sarà $P = -45° = -3^h = +21^h = +9^h$ (*dalla mezza notte*). E siccome appunto dalla mezza notte comincia il giorno civile, si dovrà avanzare la data di un giorno', semprechè trattisi di ridurre a tempo civile un'ora astronomica maggiore di 12^h. Inversamente poi, allorchè un'ora antimeridiana del giorno civile devesi ridurre in tempo astronomico si dovrà aggiungere 12^h, e diminuire di un giorno la data. Vale a dire se l'addotto esempio fosse relativo alla mattina dell'11 luglio, giorno civile, si direbbe essere 9^h a. m. del dì 11 luglio; o pure 21^h del dì 10 luglio, giorno astronomico.

555. Se adunque il sole non cambiasse di declinazione dal sorgere al tramontare rispetto all'orizzonte di un dato luogo, con un sol calcolo si determinerebbero ambedue le ore del sorgere e del tramontare; ma ciò non essendo, sarà d'uopo calcolar distintamente l'ora del sorgere o del tramontare del sole, usando della declinazione che gli corrisponde in ciascuno di tali istanti, principalmente se trovisi prossimo al piano dell'equatore, nella quale circostanza la declinazione rispetto al sole cambia di circa 1' all'ora.

556. Per poter formare prontamente un'idea dell'ora prossima nella quale il sole sorge o tramonta relativamente all'orizzonte di un dato luogo, nel caso molto raro che non sia conosciuta, si potrà tenere il seguente ragionare, che quantunque inesatto sarà sufficiente allo scopo, allorchè non siasi in latitudine molto avanzata:

Essendo un luogo sull'equatore, il sole si troverà all'orizzonte qualunque sia la sua declinazione, in tutti i giorni, 6 ore t. v. dopo la mezzanotte e 6 ore t. v. dopo il mezzogiorno, dunque quanto varia dalle 6 ore t. v. il sorgere e tramontare del sole per Parigi ch'è in latitudine 48° 50′ 13″ (l'Osservatorio) e che noi in questo computo diremo 49°, vi è cagionato dalla obliquità della sfera. E nel caso presente che trattasi di un'idea sommaria onde stimare un'ora prossima, potremo proporzionalmente alla latitudine della nave trovare di quanto questa obliquità di sfera fa variare dalle 6 ore il sorgere e tramontare del sole. Computo, che chi è esercitato può fare a memoria in un attimo di tempo, per la quantità e pel segno.

Facendo uso della *C. T.* abbiamo ancora l'altro vantaggio di trovarvi calcolata in t. m. l'ora del sorgere e tramontare del sole per Parigi; quindi da questa l'ora prossima che si deduce pel sorgere o tramontare, sarà ora t. m. della nave, ed aggiuntavi col debito segno la longitudine in tempo, si otterrà prontamente l'ora t. m. di Parigi, per la quale converrà calcolare la declinazione.

Esempio.

Essendo in latitudine 38° 42′ e longitudine 14° 12′ 31″,2 OP si domanda l'ora prossima del sorgere o tramontare del sole il dì 7 marzo 1840, giorno civile.

	sorgere.	*tramontare.*
Ora t. m. per Parigi il 7	6^h 32′	5^h 51′
t. m. pross. all'equatore	6 11	6 11
diff. per l'obliquità della sfera	+ 21	— 20
$\frac{39}{49}$ = circa $\frac{4}{5}$	+ 17	— 16
Ora pross. t. m. *pel luogo dato*	6 28	5 55
Longitudine in tempo	0 56 50 ,08	0 56 50 ,08
Ora t. m. di Parigi per la declinazione.	7 24 50 ,08	6 51 50 ,08

Si accorge ognuno a prima vista che rinvenire a memoria 6^h 28′ t. m. per ora prossima del sorgere del sole all'orizzonte del luogo, e 5^h 55′ t. m. per ora del tramonto non consta che un baleno, co-

mechè si abbiano dovuto spendere molte parole per esporne il mezzo. In fatti, posta l'obliquità di Parigi $= 1$, quella del luogo si è un quinto di meno, dunque $6^h\ 28'$ e $5^h\ 55$.

557. Potendo così agevolmente conoscere l'ora prossima t. m. del sorgere e del tramontare del sole, passiamo ad eseguire il calcolo per l'ora precisa. E per semplicità nella formola, chiameremo π l'angolo orario contato dal semimeridiano inferiore, siccome direttamente si ha dal triangolo OPs, (*fig. 80*) e dinoteremo con P il suo supplemento, o sia l'angolo orario contato dal semimeridiano superiore; per la qual cosa $\cos \pi$ e $\cos P$ avranno sempre il segno contrario; da π si avrà l'ora del sorgere, col segno che direttamente gli viene dalla formola, e da P l'ora del tramonto, col segno contrario a quello che dalla formola gli deriva: entrambi le ore però saranno sempre positive, perchè cominciano da due punti diametralmente opposti, e sono contate nello stesso senso.

Esempio 1.°

Il dì 7 marzo 1840, essendo in latitudine 38° 42′ N e longitudine 14° 12′ 31″,2 OP, si domanda l'ora t. v. del sorgere vero del centro del sole.

Ora pross. t. m. desunta dalla *C. T.*		6^h	28′		
Longitudine in tempo	+	0	56	50	,08
Ora t. m. di Parigi		7	24	50	,08
Ora astr. t. m. di Parigi il dì 6		19	24	50	,08
Declinazione a m. m. a Parigi il dì 6. . . .	—	5°	31′	03	,00
diff, in 24 ore = + 23′ 19″,5					
p. p. per $19^h\ 25'$	+	0	18	52	,23
Declinazione per l' istante . . . . *D* =	—	5	12	10	,77
Latitudine di specie diversa. . . . . . . *L* =	+	38	42		

$$-\tan D \times + \tan L = -\cos \pi$$

$D = 5°\ 12'\ 10'',77$ log tan = 8.9593265
$L = 38\ \ 42\ \ 00\ \ ,00$ log tan = 9.9037144
$\pi = 94\ \ 11\ \ 00\ \ ,94$ log cos = 8.8630409
$\times 4$

$6^h\ 16'\ 44'',06$ Ora t. v. *del sorgere vero del centro* ☉

Esempio 2.°

Per lo stesso giorno e nel medesimo luogo, si domanda l'ora t. v. del tramontare vero del centro del sole.

Ora pross. t. m. desunta dalla *C. T.*		5^h 55′
Longitudine in tempo	+	0 56 50 ,08
Ora t. m. di Parigi		6 51 50 ,08
Declinazione il dì 7 marzo	—	5° 07′ 43″ ,50
diff. in 24 ore = + 23′ 23″ ,4		
p. p. per 6^h 52′	+	0 06′ 41 ,52
Declinazione per l'istante. . . . . *D* =	—	5 01 01 ,98
Latitudine di diversa specie. . . . . *L* =	+	38 42

$$-\tan D \times +\tan L = -\cos \pi$$

$$\tan D \tan L = \cos P$$

D = 5 01 01 ,98 log tan = 8.9434523
L = 38 42 00 ,00 log tan = 9.9037144

P = 85 58 00 ,54 log cos = 8.8471667
×4

5^h 43′ 52″ ,03 Ora t. v. *del tramonto del centro* ☉

Rimane ora ad esaminare se ci siamo bene apposti nella valutazione dell'ora t. m. prossima del sorgere e tramontare, onde assicurarci di aver calcolata la declinazione per istanti abbastanza prossimi alla precisione.

	sorgere.	*tramontare.*
Ora t. v. calcolata.	6^h 16′ 44″ ,06.	5^h 43′ 52″ ,03
Longitudine in tempo.	0 56 50 ,08.	0 56 50 ,08
Ora t. v. a Parigi.	7 13 34 ,14.	6 40 42 ,11
equaz. sul m. v. per l'istante	0 11 15 ,80.	0 11 08 ,74
Ora t. m. *del luogo*	6 27 59 ,86.	5 55 00 ,77
Ora prossima dedotta dalla *C. T.* . . .	6 28 00 ,00.	5 55 00 ,00
Errore dell'approssimazione	+ 00 ,14.	— 00 ,77

Dunque la norma da noi data per rinvenire l'ora prossima è abbastanza precisa, e potrebbe meritare di essere adottata, comechè spesso adduca una differenza di circa un quarto d'ora; e così evitare di ripetere il calcolo, principalmente allorchè trattisi della luna.

Esempio 3.°

Il dì 10 giugno 1840, essendo in latitudine 20° 55′ N, e longitudine 50° 21′ EP, si domanda l'ora t. v. del sorgere e tramontare vero del sole.

	sorgere.	*tramontare.*
Ora astr. t. m. pross. il dì 10. . .	— 6ʰ 53′	+ 6ʰ 51′
Longitudine in tempo.	— 3 21 24. . .	— 3 21 24
Ora astr. t. m. a Parigi il 10. . .	— 10 14 24. . .	+ 3 29 36
Decl. a m. m. il 10 a Parigi. . .	+ 23° 03′ 12″,90	23° 03′ 12″,90
$\frac{1}{2}$ diff. dal 9 all' 11 = + 4′ 28″,9		
p. p. corrispondenti	— 00 01 54 ,66	00 00 39 ,21
Declinazioni corrispondenti. . . D =	+ 23 01 18 ,24	23 03 52 ,11
Latitudine della stessa specie. . L =	+ 20 55 00 ,00	20 55 00 ,00

Pel sorgere tan D tan L = cos ϖ

Pel tramonto tan D tan L = — cos P

D = 23° 01′ 18″,24 log tan = 9.6283098
D = 23 03 52 ,11 . . . . log tan = 9.6292092
L = 20 55 00 ,00 log tan = 9.5822864 . . . . 9.5822864
log cos = 9.2105962 . . . log cos = 9.2114956
ϖ = 80° 39′ 12″,78 . . . P = 99° 21′ 57″,60
×4 ×4
sorgere 5ʰ 22′ 36″,85 *tramonto* 6ʰ 37′ 27″,84

In questo caso, come ognuno può riconoscere, v' ha di differenza 14′ tra l'ora prossima e l'ora calcolata, quantità che quasi nulla influisce sul calcolo della declinazione.

558. Anzi, essendo questo calcolo per lo più diretto a regolare gli oriuoli comuni sul t. v. della nave, spesso, ed in particolare quando si è presso all'epoche de' solstizî, potremo contentarci di fare semplicemente, nel caso del 3.° esempio,

D = 23° 03′ 00 log tan = 9.6289048
L = 20 55 00 log tan = 9.5822844
ϖ = 80° 38′ 30″ log cos = 9.2111892
×4
5ʰ 22′ 34″ *Ora del sorgere vero*
6 37 26 *Ora del tramonto vero.*

§ 559. *Sorgere e tramonto apparente del sole.* E sarà molto più opportuno a tal fine calcolare l'ora del tramontare apparente. Abbiamo già detto (378) che un astro è veduto al di sopra dell'orizzonte prima che effettivamente vi sorga, a motivo della rifrazione, e se a questo motivo di precedenza del fenomeno aggiungeremo la considerazione della depressione dell'orizzonte dipendente dalla elevazione dell'occhio, avremo che all'istante dell'apparire il centro del sole sull'orizzonte, la sua distanza zenittale in vece di essere $a = 90^\circ$, sarà $a = 90^\circ +$ rifrazione $+$ depressione; la parallasse intanto facendo sempre comparire gli astri meno alti di quanto effettivamente sono, farà risultare la distanza zenittale maggiore del dovere, adunque bisognerà in questo computo toglierla dalla distanza zenittale, e quindi fare $a = 90^\circ +$ *rifrazione — parallasse + depressione.*

Ora essendo la rotazione della terra da occidente in oriente, dovrà scoprirsi il lembo *occidentale* del sole al di sopra dell'orizzonte, nell'atto del sorgere, prima di vedere il *centro*; e si troverà esso distante dallo zenit per un semidiametro di meno della distanza che vi ha il centro; mentre il lembo *orientale* ne sarà lontano per un semidiametro più del centro. Similmente avverrà nel caso del tramonto: prima si nasconderà il lembo *occidentale*, poi il *centro*, ed in fine il lembo *orientale*. E però volendo calcolare l'ora del sorgere o tramontare di uno de' lembi del sole, basterà nel triangolo ZPs (*fig.* 80) assegnare debitamente il valore di $Zs = a$; ed indi con la solita formola $\cos\frac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}s\;\text{sen}\,(\frac{1}{2}s - a)}{\text{sen}\,l\;\text{sen}\,d}}$ si perverrà alla conoscenza dell'angolo orario, che ridotto in tempo darà negativamente l'ora del sorgere apparente, e positivamente l'ora del tramontare apparente, del *lembo occidentale*, del *centro*, o del *lembo orientale*, secondo si è regolato il valore di a, che però distingueremo con α, a, β rispettivamente.

Il lembo occidentale suole comunemente addimandarsi *lembo superiore* nell'atto del sorgere, e *lembo inferiore* nell'atto del tramonto; e viceversa il *lembo orientale* vien detto *lembo inferiore* nel primo caso, e *lembo superiore* nel secondo. Ma tal duplicità di nomi non pare che in questo incontro conferisca alla chiarezza, quindi abbiamo stimato evitarla; e solamente continuare a servircene nelle osservazioni

delle altezze, in dove la distinzione di *superiore* ed *inferiore* riesce più chiara ed immediata dell'altra di *occidentale* ed *orientale*.

Facendo intanto ritorno al nostro proposito, e riepilogando ciò che si è detto, abbiamo che

pel *lembo occidentale* . $\alpha = 90^\circ + rif - parall + depress - semid.$
pel *centro*. . . . . . $a = 90^\circ + rif - parall + depress.$
pel *lembo orientale* . . $\beta = 90^\circ + rif - parall + depress + semid.$

che essendo su di una nave, e volendo per brevità, fissare i rispettivi valori in quantità medie approssimate, avremo

$$\alpha = 90^\circ + 33' - 8'' + 4' - 16' = 90^\circ\ 21'$$
$$a = 90^\circ + 33' - 8'' + 4' = 90^\circ\ 37'$$
$$\beta = 90^\circ + 33' - 8'' + 4' + 16' = 90^\circ\ 53'$$

Esempio.

Il dì 28 maggio 1840, essendo in latitudine 37° 26′ N, e logitudine 9° 37′ E, e con l'occhio elevato dalla superficie del mare per 20 piedi; si domanda l'ora t. v. del tramonto apparente del lembo orientale del sole.

Ora pross. t. m. del tramonto	7^h 26′ 00″,00
Longitudine in tempo	0 38 28 ,00
Ora pross. t. m. a Parigi	6 47 32 ,00
Declinazione a m. m. il 28 a Parigi.	+ 21° 31′ 26″,90
diff. in 24 ore = + 9′ 22″,5	
p. p. per 6^h 47′ 32″.	+ 00 02 39 ,19
Declinazione ☉ pel tramonto.	+ 21 34 06 ,09
	d = 68 25 53 ,91
Distanza zenittale del centro al tramonto vero	90° 00′ 00″,00
Rifrazione — parallasse, all'orizzonte	+ 0 32 52 ,00
Depressione per 20 piedi.	+ 0 04 32 ,00
Semidiametro pel dì 28.	+ 0 15 48 ,12
	β = 90 53 12 ,12

$$\cos \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen } \frac{1}{2} s \text{ sen } (\frac{1}{2} s - \beta)}{\text{sen } l \text{ sen } d}}$$

$l =$ 52° 34′ 00″,00	colog sen =	0.1001461
$d =$ 68 25 53 ,91	colog sen =	0.0315266
$\beta =$ 90 53 12 ,12		
$s =$ 211 53 06 ,03		
$\frac{1}{2} s =$ 105 56 33 ,01	log sen =	9.9829664
$\frac{1}{2} s - \beta =$ 15 03 20 ,89	log sen =	9.4145718
		19 5292109
$\frac{1}{2}$ P = 54 26 19 ,08	log cos =	9.7646054
× 8		
7^h 15′ 30″,54	Ora t. v. del *tramonto* ☉	

O pure tralasciando le minuzie ed avvalendoci dell'approssimazione

$l =$ 52° 34′ 00″ ,00	colog sen =	0.1001461
$d =$ 68 26 00 ,00	colog sen =	0.0315215
$\beta =$ 90 53 00 ,00		
$s =$ 121 53 00 ,00		
$\frac{1}{2} s =$ 105 56 30 ,00	log sen =	9.9829682
$\frac{1}{2} s - \beta =$ 15 03 30 ,00	log sen =	9.4146430
		19.5292788
$\frac{1}{2}$ P = 54 26 10 ,00	log cos =	9 9115155
× 8		
7^h 15′ 29″ ,33	Ora t. v. del *tramonto richiesto.*	

560. *Sorgere e tramontare della luna, o di un pianeta.* Il calcolo dell'angolo orario del sorgere o tramontare della luna o di un pianeta, procede in tutto analogamente a quanto si è detto rispetto a quello del sorgere o tramontare del sole; se non che per tali astri sarà indispensabile calcolare ancora l'ora del loro passaggio al meridiamo, onde a questa aggiungendo poi algebricamente l'angolo orario ridotto in tempo solare, col segno conveniente, dedurre l'ora del sorgere o tramontare.

Siccome però i pianeti assai difficilmente sono visibili all'orizzonte, a motivo della densità degli strati inferiori dell'atmosfera, la quale solamente ne permette di vedere in tale circostanza il sole o la luna, così arrecheremo semplicemente un esempio riguardante la luna. Tanto più che questi calcoli sogliònsi fare a bordo per esercizio o per piacere, senza che siano di nessuna necessità alla navigazione. Ed a questo

oggetto potendo taluno desiderare di avere in quantità medie i valori relativi alle diverse distanze zenittali del lembo *occidentale*, del *centro* e del lembo *orientale*, porremo

$$\beta' = 90^\circ + 33' - 57' + 4' - 16' = 89^\circ\ 24'$$
$$a' = 90^\circ + 33' - 57' + 4' \qquad = 89^\circ\ 40'$$
$$\alpha' = 90^\circ + 33' - 57' + 4, + 26' = 89^\circ\ 56'$$

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo in latitudine 38° 42′ N e longitudine 14° 12′ 31″,2 OP, avendo l'occhio elevato dal mare per 20 piedi; si domanda l'ora t. v. del tramonto apparente del lembo occidentale della luna.

Ora pross. tramonto ☽

Ora t. m. tramonto ☽ a Parigi	10^h 35′
Ora t. m. passaggio a Parigi	2 53
Angolo orario del tramonto a Parigi	7 42
Angolo orario del tramonto all'equatore	6 00
Diff. per l'obliquità di sfera a Parigi	1 42
$\frac{42}{45} = \frac{4}{5}$ circa	1 20
Angolo orario pel tramonto	7 20
Ora t. v. pross. del passaggio (551)	2 40
Ora t. v. *pross. del tramonto*	10 00
Longitudine in tempo circa	+ 0 57
Ora pross. t. v. di Parigi	10 57
equaz. sul m. v. circa	11
Ora pross. t. m. di Parigi	11 08

Declinazione ☽

Declinazione il dì 7 a m. m. a Parigi	+ 15° 45′ 54″,90
differenza in 12 ore = + 2° 47′ 44″,80	
p. p. per 11^h 08′	+ 2 35 37 ,90
Declinaz. pross. pel tramonto	+ 18 21 32 ,80
	d' = 71 38 27 ,20

Valore di α'

Distanza dallo zenit all'orizzonte vero	+ 90° 00′ 00″
Rifrazione orizzontale	+ 00 33 00
Depressione per 20 piedi	+ 00 04 32
	+ 90 37 32
Parallasse orizzontale	− 0 59 25
Semidiametro	− 0 16 13
	α' = 89 21 54

$$\cos \tfrac{1}{2} P' = \sqrt{\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} s \cdot \text{sen } (\tfrac{1}{2} s - a')}{\text{sen } l \text{ sen } d'}}$$

$l =$	51°	18′	00″	colog sen =	0.1076658
$d' =$	71	38	27	colog sen =	0.0226877
$a' =$	89	21	54		
$s =$	212	18	21		
$\frac{1}{2} s =$	106	09	10	log sen =	9.9825079
$\frac{1}{2} s - a =$	16	47	15	log sen =	9.4606387
					19.5735001
$\frac{1}{2} P' =$	52	15	57,20	log cos =	9.7867500
			× 8		

+	6^h	58′	07″,63	Angolo orario del tramonto ☽	
				Ritardo dal 7 all' 8 = 55′	
+	0	15	58 ,00	p. p. per 6^h 58′ 07″,63	
+	7	14	06 ,00	tempo dal merid. all' orizzonte	
	2	39	46 ,00	Ora t. v. passaggio del centro	
	9	53	52 ,00	Ora t. v. del *tramonto* ☽	

Avendo supposto che tramontasse il centro della luna a 10^h t. v. non siamo andati molto lungi dal vero.

LEZIONE XLVI.

Calcolare il sito di un astro rispetto all' equatore, all' eclittica e all' orizzonte.

561. *Rispetto all' equatore*. Se per una circostanza qualunque venisse a mancarne il grandissimo sussidio della *Connaissance des temps*, la quale ne fornisce la posizione di un astro rispetto all' equatore, ad intervalli diversi, ma sempre in modo da poterne dedurre la declinazione e l' ascensione retta per un istante qualunque; non devesi conchiudere che saremmo perciò inabilitati alla navigazione. E dicendo della *C. T.* intendiamo egualmente parlare del *Nautical Almanac* di Greenwich, e delle altre effemeridi che soglionsi pubblicare ogni anno in tutti principali stati di Europa, sempre con due o tre anni di anticipazione. Il caso che prendiamo presentemente a considerare si è quello della privazione di effemeridi dell' anno corrente.

Il calendario astronomico pubblicato ogni anno dal Reale Osservatorio di Napoli, limitandoci a' soli calcoli relativi al sole, può essere sti-

mato di buon uso per la navigazione. Anzi sarebbe forse cosa prudente nell'intraprendere un lungo viaggio, averne a bordo di quattro anni consecutivi compreso l'anno corrente, sempre però in mancanza di altrettanti volumi della *C. T.* o del *Nautical Almanac*, affinchè nel caso ben raro, in quanto alle dette effemeridi, non siasi compiuto il viaggio nella durata di cui aveansi l'effemeridi, si possa il marino aiutare ne' calcoli più interessanti co' calendarî astronomici degli anni precedenti; facendo però attenzione al cangiamento del primo meridiano, ed a servirsi di quello dell'anno bisestile, o del 1.°, o del 2.°, o del 3.° dopo il bisestile, secondo corrisponde in tale distinzione, il nuovo anno per lo quale si manca di effemeridi e di calendario astronomico.

562. L'elemento più necessario nella navigazione è la declinazione del sole, e questa si avrà in tal caso e nel modo anzidetto con sufficiente approssimazione; sempre però maggiore di quella che poteva ottenersi dalle tavole anticamente in uso, e riportate in varî trattati di navigazione. Se si hanno quattro effemeridi consecutive, si potrà similmente avere con approssimazione l'ascensione retta del sole; ma avendosi in vece quattro calendarî astronomici, bisognerà calcolarla. Questo elemento però, prescindendo da che non è di assoluta necessità come la declinazione, si può facilmente calcolare, mercè la soluzione di un triangolo sferico rettangolo, nel quale l'angolo della inclinazione dell'equatore sul piano dell'eclittica può riguardarsi costante, ed il cateto opposto è la declinazione, la quale sarà nota con precisione se il calendario è dell'anno corrente, o con approssimazione se di quattro anni innanti: il valore dell'altro cateto esprimerà l'ascensione retta, come il valore dell'ipotenusa dinoterebbe la longitudine (311). Se adunque chiamiamo ω l'obliquità dell'eclittica, avremo sen AR = tan D cot ω (281, 2°), non obliando però di fare attenzione a quale de' quattro quadranti dell'equatore deve l'AR ☉ corrispondere, secondo l'epoca dell'anno per la quale essa è richiesta.

563. L'angolo dell'equatore con l'eclittica abbiamo detto in termini generali (110) essere di 23° 27′ 57″. Questa è la quantità data da De-

lambre per obliquità *media* a 1.° gennaio 1800, con la diminuzione secolare di 48″; per la qual cosa, sarà essa per un altro anno qualunque eguale a 23° 27′ 57″ — 0″,48 × *per gli anni scorsi dal* 1800. Ma l'obliquità di cui è mestieri per calcolare l'ascensione retta del sole, mediante la declinazione data dal calendario, si è l'obliquità *apparente*, la quale non potremo avere nel caso contemplato della mancanza di ogni effemeridi dell'anno corrente. La differenza però tra l'obliquità *media* e l'*apparente* essendo appena di pochi secondi, e non dovendo l'ascensione retta del sole servire in tal caso, che per calcoli di poca importanza; come il sorgere o tramontare di un astro o il suo passaggio al meridiano, potremo volontieri servircene, e contentarci di avere l'*AR* ☉ con la differenza di pochi secondi da quella che si avrebbe dall'effemeridi. E quando in fine si volesse in certa guisa approssimare di più alla precisione il valore di tale ascensione retta, si potrebbe aggiungere all'obliquità *media* la quantità + 7″ 75, la quale dinota con sufficiente approssimazione il risultamento dell'influenza dell'aberrazione e della nutazione sulla obliquità dell'eclittica, per cui si otterrebbe in tal guisa una prossima obliquità apparente.

Esempio.

Il dì 30 dicembre 1840, essendo fornito del solo calendario astronomico di Napoli, si domanda l'*AR* ☉ a m. m. a Napoli: essa deve corrispondere al 4.° quadrante dell'equatore.

ω al 1.° gennaio 1800	23° 27′ 57″,00
0″,48 × 41 anno	— 19 ,68
ω alla fine del 1840	23 27 37 ,32
Declinazione ☉ a m. m. a Napoli . .	23 09 44 ,00

sen *AR* = tan D cotan ω

D =	23	09	44	,00	log tan	= 9.6312614
ω =	23	27	37	,32	log cotan	= 0.3625202
	80	19	38	,33	log sen	= 9.9937846
AR ☉ =	279	40	21	,67		
				× 4		
AR ☉ =	18h	38′	41″	,44		

Quando per maggiore approssimazione si fosse fatto $\omega = 23^\circ 27' 37'',32 + 7'' 75 = 23^\circ 27' 45'',07$, si sarebbe avuto per *AR* ☉ $18^h 38' 49'',74$; ed a rigore essa è $18^h 38' 48'',63$.

564. ***Rispetto all' eclittica.*** Calcolare il sito di un astro rispetto all' eclittica è pressochè inutile per la navigazione. Ma pure quando si volessero le due coordinate sferiche ad essa relative cioè la latitudine e la longitudine dell' astro, che per le stelle fisse non sono somministrate dalla *C. T.* sarebbe facile di pervenire a tale conoscenza in seguito di quanto abbiamo già detto (310).

Esempio.

Nel dì 1.° gennaio 1841, conoscendo l' ascensione retta e la declinazione apparenti di Aldebaran, se ne domanda la latitudine e la longitudine apparenti.

Obliquità dell' eclittica pel 1.° gennaio 1841.	23° 27′ 44″ ,00
Ascensione retta di Aldebaran pel 1.° gennaio. . . .	66 41 16 ,60
Declinazione boreale di Aldebaran pel 1.° gennaio . .	+ 16 11 03 ,20

$PP' = b = 23^\circ\ 27'\ 44''{,}00$ ⎫ $SPP' = C = 156^\circ\ 41'\ 16''{,}60$
$PS = a = 73\ \ 48\ \ 56\ \ {,}80$ ⎬ $PSP' = B$
$P'S = c =$ la latitudine ⎭ $PP'S = A =$ compl. longitudine

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C, \text{ e } \tan\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C \quad (279)$$

$a =$	73°48′56″,80		
$b =$	23 27 44 .00		
$a-b =$	50 21 12 ,80		
$\tfrac{1}{2}(a-b) =$	25 10 36 ,40	log sen=9.6288103	log cos=9.9566484
$a+b =$	97 16 40 ,80		
$\tfrac{1}{2}(a+b) =$	48 38 20 ,40	colog sen=0.1246140	colog cos=0.1799293
$C =$	156 41 16 ,60		
$\tfrac{1}{2}C =$	78 20 38 ,30	log cotan=9.3144778	9.3144778
$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) =$	6 40 08 ,20	log=9.0678021, $\tan\tfrac{1}{2}(A+B)$ 15°46′34″,55	log=9.4510555
$\tan\tfrac{1}{2}(A+B) =$	15 46 34 ,55		
$A =$	22 26 42 ,75	il cui complemento . . . . . . , . . 67 33 17 ,25 *longitudine*	
$B =$	9 06 26 ,53		

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}S\cos(\tfrac{1}{2}S \sim C)}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B}}$$

C =	156°	41′	16″	,60		
A =	22	26	42	,75	. . . . . colog sen =	0.4181784
B =	9	06	26	,53	. . . . . colog sen =	0.8005601
S =	188	14	25	,88		
$\frac{1}{2}$ S =	94	07	12	,94	. . . . . . log cos =	8.8564312
$\frac{1}{2}$ S ∼ C =	62	34	03	,66	. . . . . . log cos =	9.6634186
						19.7385883
$\frac{1}{2}$ c =	47	44	25	,70	. . . . . . log sen =	9.8692941
	47	44	25	,70		
c =	95	28	51	,40	o sia — 5° 28′ 51″,40 *latitudine australe*.	

565. In mancanza dell'effemeridi, essendo che ne mancherebbe ancora la longitudine del sole, questa potrà sempre facilmente esser calcolata, secondo abbiamo già dimostrato (311, 562); bastandoci in quanto alla latitudine di considerarla sempre zero.

566. *Rispetto all' orizzonte*. In seguito di ciò che si è detto al §. 312 abbiamo di già veduto come si determina l'altezza di un astro in un istante qualunque (522 a 532); e come viceversa, nota l'altezza di un astro si determina l'istante cui essa corrisponde (533 a 549); ed abbiamo altresì veduto come si determinano il caso e l'istante in cui un astro trovisi al lembo orientale od occidentale dell'orizzonte, o pure al punto della sua culminazione nell'appulso del suo centro al meridiano (550 a 560); per la qual cosa abbiamo determinata la posizione dell'astro rispetto all'orizzonte, sostituendo alla determinazione dell'amplitudine del verticale dell'astro, la determinazione del suo cerchio orario.

567. Conosciuta adunque la posizione di un astro rispetto all'orizzonte siam'ora in grado di dedurre la posizione dello zenit rispetto all'astro, e quindi la latitudine e la longitudine del luogo. In fatti la latitudine di un luogo altra cosa non è che l'arco di meridiano terrestre simile all'arco di meridiano celeste che rappresenta la declinazione dello zenit, per cui tali archi espressi in gradi son sempre eguali tra loro; e la longitudine di un luogo, a rigore parlando, è la differenza tra l'ascensione retta del primo meridiano, e quella del meridiano del

luogo. Ma la prima è data dalla *C. T.* in tutti i giorni a m. m. a Parigi, e può aversi per un altro istante qualunque (489), perciò dall'esser note per mezzo della *C. T.* le ascensioni rette degli astri e quella del meridiano di Parigi, siegue che se conosciamo l'ora di Parigi, o di qual altro siasi primo meridiano, per lo quale si abbiano l'effemeridi, e l'ora che contasi a bordo nell'istante di un dato fenomeno celeste, la differenza delle ore, essendo differenza di ascensione retta in tempo, ridotta in gradi darà la longitudine del luogo, rispetto al meridiano delle tavole.

568. Prima però della necessità di calcolare la latitudine e la longitudine dell'arrivo n'è indispensabile conoscere la declinazione dell'ago calamitato, onde poter navigare, e gl'istanti opportuni alle diverse osservazioni all'uopo necessarie; e però n'è d'uopo non lasciar quest'argomento senza occuparci della posizione del verticale di un astro in un dato istante, rispetto a uno de'quattro punti cardinali dell'orizzonte, o in altri termini dell'*azzimutto*, dell'*amplitudine*, del passaggio dell'astro al *verticale primario* o al *verticale tangente*; onde poi con uno di questi mezzi pervenire alla conoscenza della declinazione dell'ago, o dell'istante opportuno all'osservazione che ne occorre eseguire.

569. *Dell'azzimutto.* Per determinare l'arco di orizzonte interposto tra uno de'cardini Nord o Sud ed il verticale dell'astro, e per esso l'angolo SZP (*fig.* 79) o il suo supplemento, basterà che nel triangolo SZP siano noti tutti e tre i lati, cioè i complementi della declinazione, dell'altezza dell'astro, e della latitudine del luogo, e si avrà

$\cos \frac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} s - d \right)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} l}}$ (277).



Esempio 1.°

Il dì 7 marzo 1840 verso l'ora vespertina 4^h 38′ t. m. essendo in latitudine 38° 42′ N, e longitudine 14° 12′ 31″ OP si è osservata un'altezza del sole, che corretta si è trovata di 14° 36′ 22″,67, mentre la declinazione debitamente calcolata è — 5° 02′ 17″,42 si chiede l'azzimutto del sole.

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2} s \;\text{sen}\,(\tfrac{1}{2} s - d)}{\text{sen}\, l \;\text{sen}\, d}}$$

$l =$	51°	18′	00″	,00	colog sen =	0.1076658
$a =$	75	23	37	,33	colog sen =	0.0142676
$d =$	95	02	17	,42		
$s =$	221	43	54	,75		
$\tfrac{1}{2} s =$	110	51	57	,37	log sen =	9.9705485
$\tfrac{1}{2} s - d =$	15	49	39	,95	log sen =	9.4357591
						19.5282410
$\tfrac{1}{2} Z =$	54	29	03	,59	log cos =	9.7641205
$Z =$	108	58	07	,18	*Azzimutto* dal Nord	
$Z =$	71	01	52	,82	*Azzimutto* dal Sud.	

Esempio 2.°

Nell'istante medesimo dell'esempio antecedente l'altezza vera del centro della luna era di 59° 28′ 40″,40, e la declinazione di + 17° 05′ 43″, si domanda l'azzimutto.

$$\cos \tfrac{1}{2} Z' = \sqrt{\frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2} s \;\text{sen}\,(\tfrac{1}{2} s - d')}{\text{sen}\, l \;\text{sen}\, a'}}$$

$l =$	51°	18′	00″	,00	colog sen =	0.1076658
$a' =$	30	31	19	,60	colog sen =	0.2942454
$d' =$	72	54	17	,00		
$s =$	154	43	36	,60		
$\tfrac{1}{2} s =$	77	21	48	,30	log sen =	9.9893507
$\tfrac{1}{2} s - d' =$	4	27	31	,30	log sen =	8.8906467
						19.2819086
$\tfrac{1}{2} Z =$	64	03	25	,36	log cos =	9.6409543
$Z =$	128	06	50	,72	*Azzimutto* dal Nord	
$Z =$	51	53	09	,28	*Azzimutto* dal Sud.	

570: ***Per l'amplitudine vera.*** Se nel triangolo sferico *abs* o pure *a′bs′* (*fig.* 80) rettangolo in *a* son noti l'angolo *abs* complemento della latitudine del luogo, ed *as* declinazione dell'astro, si determine-

rà facilmente l'amplitudine vera *bs*, perocchè avremo $\text{sen } bs = \frac{\text{sen } as}{\text{sen } abs}$ (281, 3°) e chiamando V l'amplitudine *bs* o *bs'*, e servendoci pel dippiù delle solite notazioni, sarà $\text{sen V} = \frac{\text{sen D}}{\cos \text{L}}$.

L' amplitudine è necessariamente della stessa specie della declinazione *boreale* od *australe*; oltre a che sarà *ortiva* od *occidua* secondochè siasi calcolata quella del sorgere o del tramonto dell'astro.

Esempio.

Si domanda l'amplitudine vera ortiva del sole il dì 1.° marzo 1840, essendo in latitudine 32° 40′ N, e longitudine 15° EP.

Ora astr. t. m. pross. del sorgere a 29 feb. . .	18^h 33′
Longitudine in tempo	1 00
Ora astr. t. m. di Parigi il dì 29 feb.	17 33
Declinazione per detto istante. . . . . D = —	7° 32′ 34″

$$\text{sen V} = \frac{\text{sen D}}{\cos \text{L}}$$

D =	7°	32′	34″	,00	log sen = 9.1181535
L =	32	40	00	,00	colog cos = 0.0747782
V =	8	58	14	,80	log sen = 9.1929317

V = *Amplitudine australe.*

571. L'equazione $\text{sen V} = \frac{\text{sen D}}{\cos \text{L}}$ ne fa intanto conoscere che se L = 0°, si avrà sen V = sen D. *Quando la latitudine è zero, l' amplitudine sarà eguale alla declinazione.*

572. Se L = 90°, si avrà $\text{sen V} = \frac{\text{sen D}}{0}$ = *infinito positivo.* Nella posizione di sfera parallela, confondendosi l'equatore con l'orizzonte non vi sarà oriente ed occidente; quindi si confonderanno i paralleli e gli almucantari, e le amplitudini saranno di quantità infinita.

573. Se D = 0°, sarà $\text{sen V} = \frac{0}{\cos \text{L}}$ = *infinito negativo. Quando di un astro la declinazione è zero, non vi sarà amplitudine per nessuna latitudine del globo.*

574. Se $D = 90°$, avremo $\text{sen}\, V = \frac{1}{\cos L} = \sec L$. Cioè, per un astro che avesse 90° di declinazione vi sarà un' amplitudine orizzontale di 90°, esclusivamente per l'orizzonte di un luogo a zero latitudine; e per tutte le altre latitudini sembra l'equazione, a prima vista, contenere un impossibile, perciocchè non possono esservi seni eguali alle seganti eccetto il solo caso testè contemplato di seno 90° = secante 0°. Ma laddove si rifletta che $1 : \cos L :: Q : q$, chiamando Q il quadrante di un cerchio massimo, e q quello di un suo parallelo messo alla distanza indicata da L, l'equazione $\text{sen}\, V = \frac{\text{sen}\, D}{\cos L}$ diverrà $\text{sen}\, V = \frac{\text{sen}\, Q}{\cos L}$. Cioè, l'amplitudine continuando ad essere di 90°, dovranno questi aver per misura il grado dell'almuoantaro che trovasi ad altezza eguale alla latitudine del luogo; in guisachè l'amplitudine sarà 90°, ma l'astro si troverà alto dall'orizzonte quanto la latitudine del luogo. Vale a dire, ripeteremo che l'altezza del polo è uguale alla latitudine del luogo; che il verticale che vi passa, cioè il meridiano, ha 90° di amplitudine, per la qual cosa segnerà i punti Nord e Sud dell' orizzonte, comunque da questo i poli Nord e Sud del mondo siano discosti.

575. *Per l' amplitudine apparente.* Quando si chiegga l' amplitudine apparente, essendochè il centro del sole (p. e.) trovasi all'orizzonte visibile, allorchè è tuttavia distante dallo zenit, a termine medio, per 90° 37′ (559), sarà d'uopo ricorrere al triangolo ZP*s*; nel quale, dopo aver convenevolmente regolato il valore di Z*s* rispetto al centro o ad un lembo dell'astro, si calcolerà l'azzimutto *s*ZP (569) il cui complemento sarà l'*amplitudine apparente* addimandata.

Esempio.

Il dì 1.° marzo 1840, essendo in latitudine 32° 40′ N, e longitudine 15° EP, si domanda l'amplitudine apparente del sorgere del lembo occidentale del sole, la cui declinazione in tale istante è prossimamente — 7° 32′ 34″, come dall'esempio antecedente.

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2} s \;\text{sen}\,(\tfrac{1}{2} s - d)}{\text{sen}\, a \;\text{sen}\, l}}$$

$a =$	90°	21′	00″	,00	colog sen =	0.0000081
$l =$	67	20	00	,00	colog sen =	0.0349101
$d =$	97	32	34	,00		
$s =$	155	13	34	,00		
$\frac{1}{2} s =$	127	36	47	,00	log sen =	9.8988078
$\frac{1}{2} s - d =$	30	04	13	,00	log sen =	9.6998913
						19 6336173
$\frac{1}{2} Z =$	49	00	55	,45	log cos =	9.8168086
$Z =$	98	01	50	,00	*Azzimutto* dal Nord	
$V =$	8	01	50	,90	*Amplitudine apparente ortiva australe di α.*	

576. ***Per l'astro al primo verticale.*** Nel caso che un astro ha la declinazione della stessa specie e minore della latitudine del luogo, il parallelo cui sembra esso descrivere, dovendo necessariamente dall'una e dall'altra parte del meridiano intersecare il primo verticale nell'emisfero visibile (549), sarà interessante conoscere a quale altezza, ed in quale istante del giorno tal circostanza si avvera; imperciocchè allora si potrà distinguere per mezzo del compasso azzimuttale il punto dell'orizzonte cui corrisponde il vero cardine orientale od occidentale (86), e l'istante opportuno al calcolo dell'angolo orario (549).

Nel triangolo $ba's''$ (*fig.* 80) rettangolo in a' possiamo ottenere $\text{sen}\, bs'' = \frac{\text{sen}\, a's''}{\text{sen}\, a'bs''}$ (281 3.°), e ponendo $bs'' = v$ sarà $\text{sen}\, v = \frac{\text{sen D}}{\text{sen L}}$. Avuta così l'*altezza vera* dell'astro all'istante che esso sarà nel primo verticale, sarà necessario debitamente ridurla ad *altezza strumentale*, se la è chiesta in quantità da voler col mezzo dello strumento riscontrare l'istante per via di fatto. Nel qual caso bisognerà situare la linda dello strumento, secondo la quantità calcolata di *altezza strumentale*; ed indi porsi ad osservare alquanto prima, e fino a che sia giunto l'astro all'altezza strumentale di già stabilita sull'arco graduato.

577. Questo istante però sarà sempre agevole preventivamente calcolare; dappoichè trattandosi di un'ora per la quale doversi apparecchiare a fare un calcolo, non sarà necessario pretendere molta esattezza, e basterà avvalersi di una declinazione prossima. Così essendo, nel triangolo sferico ZPs'' (*fig.* 80), rettangolo in Z, noti PZ e Ps'', si avrà $\cos P = \cot Ps'' \tan PZ$ (281 6.°) $= \tan D \cot L$.

Esempio.

Il dì 31 marzo 1840, essendo in latitudine 43° 50′ N, e longitudine 15° OP, si domanda l'ora e l'altezza del sole al suo passaggio occidentale pel verticale primario. Suppongasi che ciò avvenga all'ora prossima t. m. 6^h.

Ora pross. t. m. il dì 31 marzo. . . .	$6^h\ 00'$
Longitudine in tempo	1 00
Ora pross t. m. a Parigi.	7 00
Declinazione per detto istante	+ 4° 24′08″,17

$$\cos P = \tan D \cot L$$

D = 4° 24′ 10″	log tan = 8.8864601
L = 43 50 00	log cot = 0.0176913
P = 85 24 00	log cos = 8.9041514
× 4	
5^h 41′ 36″ Ora t. v. del *passaggio al primo verticale.*	

$$\operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} L}$$

D = 4° 24′ 10″	log sen = 8.8851766
L = 43 50 00	colog sen = 0.1595407
v = 6 21 50	log sen = 9.0447173

v = *Altezza vera* ☉ *al primo verticale.*

578. *Per l'angolo di posizione.* Nell'altro caso poi che l'astro abbia la declinazione della stessa specie, e maggiore della latitudine del luogo, il parallelo dell'astro non intersecando il primo verticale, importerà di conoscere a quale altezza ed in quale istante si troverà esso al *verticale tangente* (549). Chiamiamo *angolo di posizione* di un astro quello fatto dal verticale col cerchio di declinazione: è chiaro che il verticale dell'astro sarà tangente il parallelo, all'istante che l'angolo di posizione è retto; perciocchè essendo a contatto gli archi *Ze* ed *em* (*fig.* 80) avranno di comune la tangente in *e*, ma il cerchio di de-

clinazione è necessariamente perpendicolare al parallelo, dunque in tal caso sarà similmente retto l'angolo ZeP; e sarà pel triangolo ZPe $\cos P = \tan L \cot D$, e $\text{sen} A = \frac{\text{sen} L}{\text{sen} D}$: ed in questo caso potremo similmente avvalerci di una declinazione prossima.

Esempio.

Il dì 31 marzo 1840, essendo in latitudine 0° 45′ N, e longitudine 30° 20′ OP, si domanda l'ora t. v. nella quale l'angolo di posizione del sole sarà retto il mattino; e quale sarà la sua altezza vera. Si supponga che tal fenomeno avvenga a circa 7^h t. m.

Ora astr. t. m. pross. il dì 30	19^h	00′	00″	,00
Longitudine in tempo	2	01	20	,00
Ora pross. t. m. a Parigi	21	01	20	,00
Declinazione per detto istante . . . . +	4	14	49	,60

$$\cos P = \tan L \cot D$$

L =	0°	45′	00″	,00	log tan = 8.1169634
D =	4	14	49	,60	log cot = 1.1292325
P =	79	50	49	,25	log cos = 9.2461959
				× 4	
	5^h	19′	23″	,30	
	6	40	36	,70	*Ora* t. v. *richiesta*

Ora astr. t. v. a bordo	18^h	40′	36″	,70
Longitudine in tempo	2	01	20	,00
Ora astr. t. v. a Parigi	20	41	56	,70
equaz. sul m. v. per l'istante.	+	18	42	,49
Ora astr. t. m. a Parigi.	21	00	39	,19
Declinazione per detto istante.	4	14	49	,25

$$\text{sen} A = \frac{\text{sen} L}{\text{sen} D}$$

D =	4°	14′	49″	,25	colog sen = 1.1304368
L =	0	45	00	,00	log sen = 8.1169262
A =	10°	10′	50″	,00	log sen = 9.2473630

Altezza richiesta = 10° 10′ 50″

Per conoscere in tale circostanza la posizione del verticale dell'astro rispetto a' punti cardinali, si calcolerà l'azzimutto, facendo nello stesso triangolo $\cos Z = \tan L \cot A$.

LEZIONE XLVII.

De' principali metodi onde calcolare la declinazione dell'ago magnetico.

579. Ad onta delle industriose ed indefesse cure degli artisti Touboulic e Schmalcalder, che molti importanti miglioramenti arrecarono alla costruzione del compasso di rotta e a quello azzimuttale, rimane sempre indispensabile, per l'uomo di mare precipuamente, il dovere di calcolare la quantità e la specie della declinazione dell'ago magnetico. È d'uopo adunque indicare almeno i principali metodi a ciò relativi, onde potersene il marino avvalere nelle diverse circostanze, trascurando per brevità alcuni altri metodi meglio adatti a terra che all'uso di mare. N'esporremo solo tre i più comunemente adoperati nella navigazione, cioè quello per mezzo delle *amplitudini*, quello per mezzo degli *azzimutti*, e finalmente quello per mezzo del passaggio di un astro al *verticale primario*.

580. *Metodo delle amplitudini.* Analogamente alla definizione dell'amplitudine vera, chiameremo *amplitudine osservata* l'arco della rosa nautica interposto tra l'Est o l'Ovest della medesima, e il punto che su questa corrisponde al rivelamento dell'astro, nel momento del suo sorgere o tramontare: operazione che potrà eseguirsi con sufficiente precisione per mezzo del compasso azzimuttale (134). Indi per l'ora di tale osservazione si calcolerà la declinazione dell'astro, e facendo $\text{sen V} = \frac{\text{sen D}}{\text{cos L}}$ (570) si otterrà l'amplitudine vera. Dal paragone finalmente di queste due amplitudini la *calcolata* e l'*osservata*, si dedurrà la declinazione dell'ago magnetico.

581. Questo calcolo suol farsi in mare dirigendo l'osservazione al sole o alla luna, siccome i soli astri de' quali si distingua ad occhio nudo, quando le circostanze lo permettono, il fenomeno del sorgere e del tramontare. Essendo però che una delle due quantità dipende sempre dall'osservazione, così bisogna calcolare, per ottenere la coincidenza degl'istanti, l'amplitudine *apparente* e non la *vera*.

582. Per l'amplitudine apparente del sole potrà esser risparmiato il calcolo, prendendo il rilevamento di esso per l'amplitudine osservata, non già all'istante del suo sorgere o tramontare, ma in vece allorchè trovasi col lembo inferiore alto dal livello del mare per $\frac{2}{3}$ del suo diametro, pratica che potrà agevolmente seguirsi, attesochè il paragone delle dimensioni è immediato. Allora l'amplitudine osservata corrisponderà al sorgere o tramontare vero, e perciò sarà regolare paragonarla con l'amplitudine *vera* calcolata. In fatti, allorquando il centro del sole è sull'orizzonte visibile, trovasi a 90° 37′ di distanza dallo zenit, e per trovarsi alla distanza di 90° avrà d'uopo elevarsi di 37′; ma il centro sarà elevato di 37′ quando il lembo inferiore lo è di 21′, cioè di due terzi del diametro, dunque in tale circostanza il centro del sole si troverà all'orizzonte vero (559).

Non può dirsi però altrettanto riguardo alla luna; chè se per tutti gli astri in generale il sorgere e tramontare apparente precede il sorgere e tramontare vero, essendo la somma della rifrazione orizzontale e della depressione sempre maggiore della parallasse orizzontale; per la luna al contrario, essendo la somma della rifrazione orizzontale e della depressione che può aversi dall'elevazione dell'occhio a bordo di una nave, costantemente minore della parallasse orizzontale, avviene che all'istante del sorgere e tramontare vero la è tuttavia in depressione rispetto all'orizzonte apparente (560), quindi essa non è visibile e molto meno potrà prendersene un rilevamento col compasso orizzontale. Dirigendo dunque l'osservazione alla luna dovrà necessariamente farsi uso dell'amplitudine apparente, allorquando si voglia da questa ottenere la declinazione dell'ago magnetico.

583. È ben chiaro che se le due amplitudini sono eguali l'Est o l'Ovest del compasso azzimuttale, il quale è sempre a rosa semplice (131), corrisponderà all'Est o all'Ovest dell'orizzonte, e l'ago magnetico si troverà nel piano del meridiano del luogo: in ogni altro caso vi sarà declinazione. E ***secondo il cardine indicato dalla rosa corrisponde a dritta o a sinistra di quello del mondo, la declinazione sarà a dritta o a sinistra; cioè*** NE ***nel primo caso,*** NO ***nel secondo; e la quantità sarà indicata dalla differenza delle amplitudini.***

584. Or essendo contate le amplitudini dal primo verticale verso Nord e verso Sud, cioè in direzione opposte, bisognerà che abbiano le prime *segno* contrario alle seconde: noi, al nostro solito daremo il segno + alle *boreali*, ed il segno — alle *australi*.

585. Finalmente, siccome il residuo della sottrazione algebrica fra le due amplitudini, esprimer deve la declinazione magnetica, così dovrà costantemente, l'amplitudine *osservata* esser la grandezza sottraenda, e la *calcolata* esser la grandezza sottrattiva.

586. Da ciò scaturisce semplicissima la regola: *se il residuo è positivo la declinazione dell' ago è dal canto dell' osservazione; se è negativo, sarà essa della specie opposta.*

Esempi.

	Ampl. ortive		*Ampl. ortive*		*Ampl. ortive*
Osservata . . .	+21°	Osservata . . .	+13°	Osservata . .	+ 7°
Calcolata . . .	+ 5	Calcolata . . .	+27	Calcolata. . .	— 9
Declinazione .	+16 (NE)	*Declinazione* .	—14 (NO)	*Declinazione*.	+16 (NE)
	Ampl. ortive		*Ampl. occidue*		*Ampl. occidue*
Osservata . . .	— 5°	Osservata . . .	+23°	Osservata. . .	+ 7°
Calcolata . . .	+13	Calcolata . . .	+ 3	Calcolata. . .	+17
Declinazione .	—18 (NO)	*Declinazione* .	+20 (NO)	*Declinazione*.	—10 (NE)
	Ampl. occidue		*Ampl. occidue*		*Ampl. ortive*
Osservata . . .	+ 9°	Osservata . . .	—11°	Osservata. . .	±11°
Calcolata . . .	— 4	Calcolata . . .	+11	Calcolata. . .	±11
Declinazione .	+13 (NO)	*Declinazione* .	—22 (NE)	*Declinazione*.	00

587. *Metodo degli azzimutti.* Nell'atto dell'osservazione dell'altezza col sestante, o col cerchio a riflessione, si noterà l'istante, e si prenderà da altro osservatore un rilevamento dell'astro al compasso azzimuttale; indi calcolata debitamente la sua declinazione, ed essendo nota la latitudine del luogo si potrà avere l'azzimutto per l'istante dell'osservazione, il quale paragonato con l'altro osservato, somministrerà la quantità angolare della declinazione magnetica.

588. Poichè gli azzimutti possono indifferentemente esser contati dal Nord o dal Sud, noi per formarci una regola pienamente analoga a quella esposta per le amplitudini, li conteremo dal Nord se il verticale dell'astro corrisponde al primo o quarto quadrante dell'orizzonte; e dal Sud se il suo verticale corrisponde al secondo o terzo quadrante. Daremo loro il segno *negativo* se sono a *dritta*, cioè nel primo o terzo quadrante dell'orizzonte o della rosa nautica, ed il segno *positivo* se sono a *sinistra*, cioè nel quarto o secondo quadrante, inversamente a quanto si è praticato per le amplitudini, essendo gli azzimutti i complementi di esse. Ed avremo la regola seguente: *dall'azzimutto osservato tolto algebricamente quello calcolato, se il segno è positivo la declinazione sarà* NE; *e se il segno è negativo, sarà* NO.

Esempi.

Azz. boreali	*Azz. boreali*	*Azz. boreali*
Osservato . . . +84°	Osservato . . . +46°	Osservato . . +10°
Calcolato . . . +75	Calcolato . . . +63	Calcolato. . . −16
Declinazione . + 9 (NE)	*Declinazione* . −17 (NO)	*Declinazione*. +26 (NE)
Azz. boreali	*Azz. australi*	*Azz. australi*
Osservato . . . −116°	Osservato . . . −34°	Osservato. . . − 9°
Calcolato . . . − 88	Calcolato . . . −14	Calcolato. . . +13
Declinazione . − 28 (NO)	*Declinazione* . −20 (NO)	*Declinazione*. −22 (NO)
Azz. australi	*Azz. australi*	*Azz. australi*
Osservato . . . + 7°	Osservato . . . +26°	Osservato. . . ±17°
Calcolato . . . − 9	Calcolato . . . + 5	Calcolato. . . ±17
Declinazione . +16 (NE)	*Declinazione* . +21 (NE)	*Declinazione*. 00

Il metodo degli azzimutti dovrà esser sempre preferito a quello delle amplitudini quando la latitudine sia molto avanzata; giacchè in tal caso, essendo piccolo l'angolo fatto dall'orizzonte col parallelo che sembra l'astro descrivere, non può distinguersi con precisione l'istante nel quale dovrà prendersi l'amplitudine osservata.

589. *Rilevamento astronomico di un oggetto terrestre.* Se all'istante medesimo che si è presa l'altezza osservata di un astro per calcolarne l'azzimutto, si prende da un secondo osservatore la distanza angolare

dall'astro ad un punto ben distinto di un oggetto terrestre, e poscia, immediatamente, se le osservazioni sono fatte essendo alla vela, si osservi ancora l'altezza dell'oggetto, si potrà facilmente averne il rilevamento astronomico; il quale non solo sarà utile a determinare la sua posizione rispetto all'osservatore ed al meridiano del luogo, ma potrà servirci a trovare i rilevamenti di tutti gli altri punti che sono a veggente sul proprio orizzonte, con osservare semplicemente, mediante il cerchio od il sestante, le distanze angolari dall'uno all'altro (224); ed infine se da un terzo osservatore fosse preso un rilevamento dell'oggetto terrestre nell'istante medesimo delle osservazioni, si potrebbe ancora dedurne la declinazione dell'ago, quando si avesse per iscopo l'una e l'altra ricerca.

Avendo la distanza angolare tra l'astro e l'oggetto M, la quale chiameremo δ, e le loro altezze A ed M, i cui complementi siano a ed m avremo un triangolo obliquangolo SZM avente noti tutte e tre i lati; e perciò sarà $\cos \frac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} s - \delta\right)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} m}}$, e diverrà noto così l'angolo rappresentante la differenza degli azzimutti dell'astro e dell'oggetto rispetto entrambi al polo Nord o al polo Sud. Questa differenza, aggiunta o tolta all'azzimutto dell'astro secondo conviene alla circostanza, farà conoscere l'azzimutto dell'oggetto terrestre.

590. *Opportunità dell'osservazione*. Nel triangolo ZPS (*fig.* 79), abbiamo per la prima analogia differenziale $dl : dZ :: \operatorname{sen} d : \cot P$; ma $\cot P$, quando l'angolo P fosse di 90°, risulta eguale a zero; dunque in tal caso, cioè quando l'angolo orario è di 6^h, dZ è eguale a zero; per la qual cosa un errore commesso sulla valutazione della latitudine non avrà influenza sull'angolo azzimuttale, se l'azzimutto è calcolato per l'istante in cui l'angolo orario è retto; e questo sarà il momento più favorevole all'osservazione, allorchè si abbia qualche incertezza sulla latitudine.

Similmente si ha $da : dZ :: \operatorname{sen} a : \cot S$, e facendo lo stesso ragionare conchiuderemo, che onde un errore commesso sull'altezza non affetti l'angolo azzimuttale, il momento più favorevole si è quello in cui l'angolo di posizione S è retto.

591. *Metodo dell' astro al primo verticale.* Allorchè vogliasi dedurre la declinazione dell' ago calamitato dall' osservazione di un astro nell' istante che trovasi al primo verticale, sarà semplicissimo il metodo. Calcolata l'altezza, e resala scorretta strumentale, si attenderà che l' astro giunga all' altezza indicata dalla linda, la quale si avrà cura di situar opportunamente prima dell' osservazione; o pure si calcolerà l' istante nel quale l' astro dovrà trovarsi al primo verticale, ed in tal circostanza, avvertita la mercè dell' uno o dell' altro metodo, si prenderà un rilevamento dell' astro al compasso azzimuttale. Se l' Est o l'Ovest cade a *dritta* la declinazione magnetica sarà a dritta, cioè a NE; e se cade a *sinistra* la sarà a sinistra, o sia a NO, di tutta la quantità angolare di cui l' Est o l' Ovest della rosa si scosta dall' Est o dall' Ovest del mondo.

LEZIONE XLVIII.

De' principali metodi per trovar la latitudine in mare.

592. L' assicurare la latitudine in mare è cosa di sì alta importanza, che nella maggior parte de' calcoli siamo nella necessità di servirci della latitudine stimata, la quale essendo sempre incerta per la fallacia degli elementi di calcolo, ch' è mestieri adoperare per rinvenire il punto stimato, diviene indispensabile al marino, calcolare astronomicamente la latitudine, almeno una volta al giorno, sempre che lo stato dell'atmosfera lo permette.

Molti sono i metodi finora all' oggetto ritrovati, ma noi ci occuperemo solo de' tre più sicuri, e generalmente adottati: per mezzo dell'altezza meridiana, per mezzo delle altezze circomeridiane, e per mezzo di due altezze non meridiane.

593. *Per mezzo dell' altezza meridiana.* Per calcolare la latitudine per mezzo dell' altezza meridiana, si osserverà tale altezza a *mezzodì vero* se l' astro è il sole; altrimenti si calcolerà preventivamente l' ora del passaggio dell' astro al meridiano, e si osserverà l' altezza all' ora ottenuta dal calcolo; nell' uno e nell' altro caso si ridurrà l'altezza stru-

mentale ad altezza vera del centro; e finalmente si dovrà calcolare la declinazione per lo medesimo istante.

594. Avendo data alla declinazione *boreale* il segno +, e alla declinazione *australe* il segno —, siegue che la distanza polare di un astro dal polo Nord avrà il segno —, e dal polo Sud il segno +. Inoltre, un astro al momento della sua altezza meridiana, trovasi nel medesimo piano de' poli dell' equatore e de' poli dell' orizzonte, e n' è contata l' altezza dall' orizzonte verso lo zenit, cioè nello stesso senso della distanza polare, adunque l' altezza avrà sempre lo stesso segno della distanza polare, in tutto il semimeridiano dalla parte dello Zenit, rispetto all' asse del mondo; mentre nell' altro semimeridiano dalla parte del Nadir, le distanze polari cambiando il segno, si troveranno le altezze con un segno a quelle contrario.

Senza il soccorso di figura è ben chiaro che la *differenza algebrica della distanza polare e dell' altezza darà sempre la latitudine, la cui specie sarà dinotata dal segno.*

Questa regola si può enunciare ancora nel seguente modo: *la differenza positiva tra la distanza dell' astro dal polo verso cui l' osservatore è rivolto e l' altezza vera darà la latitudine: se la distanza è la maggiore, la latitudine sarà di specie opposta; se è la minore, la latitudine sarà della stessa specie della distanza polare.* Quando si tratti di una seconda altezza meridiana la *differenza* diverrà *somma*, e la specie sarà sempre la medesima del polo elevato.

Esempi.

Osservazione Nord			*Osservazione* Sud		
Dist. polare superiore.	(N).	— 73°	Dist. polare superiore.	(S).	+ 73°
Altezza meridiana. . .	(N).	— 66	Altezza meridiana . .	(S).	+ 66
Latitudine.	(S).	— 07	*Latitudine*	(N).	+ 07
Osservazione Nord			*Osservazione* Sud		
Dist. polare superiore.	(N).	— 71°	Dist. polare superiore.	(S).	+ 71°
Altezza meridiana. . .	(N).	— 84	Altezza meridiana. . .	(S).	+ 84
Latitudine.	(N).	+ 13	*Latitudine*.	(S).	— 13
Osservazione Nord			*Osservazione* Sud		
Dist. polare inferiore.	(N).	+ 68°	Dist. polare inferiore .	(S).	— 68°
Altezza meridiana . .	(N).	— 09	Altezza meridiana. . .	(S).	+ 09
Latitudine.	(N).	+ 77	*Latitudine*.	(S).	— 77

Ne' quali esempî potrà ciascuno convincersi, che, mettendo da parte il segno, la latitudine è sempre la differenza tra la distanza polare della medesima specie dell'osservazione, e l'altezza meridiana; e che essendo la distanza maggiore dell'altezza, la latitudine si è di specie opposta all'osservazione; ma nel caso contrario che la distanza sia minore dell'altezza, la latitudine sarà della specie stessa dell'osservazione; e solo quando si abbia un'altezza meridiana inferiore, la differenza diverrà somma.

595. *Per mezzo delle altezze circomeridiane.* Il metodo di ritrovare la latitudine per mezzo delle altezze circomeridiane viene assai riputato, ed in parecchie circostanze è di grande utilità. Noi ora n'esporremo il metodo in pria, poscia il principio da cui esso dipende.

Si calcolerà preventivamente l'ora che segnar deve il cronometro all'istante del passaggio dell'astro al meridiano: circa 8 o 10 minuti prima o dopo di così fatta ora calcolata si osserveranno parecchie altezze dell'astro, notando i corrispondenti istanti. Delle altezze avute si prenderà la media, e si avrà questa per altezza strumentale meridiana prossima. Si faranno le differenze tra l'ora calcolata pel passaggio, e l'ora nella quale si è osservata ciascuna altezza, per modo che si avranno altrettanti intervalli di tempo, quante sono le altezze osservate: di questi intervalli si prendano i quadrati corrispondenti nella ta-

vola XXXI, e similmente se ne deduca il medio, che sarà un moltiplicatore. Finalmente dalla tavola XXXII prendendo per argomenti la latitudine stimata, e la declinazione calcolata per l'istante, si otterrà un numero di secondi e decimi, che sarà il moltiplicando dell'anzidetto moltiplicatore, il cui prodotto aggiunto all'altezza meridiana prossima già trovata, farà conoscere l'altezza meridiana strumentale: indi si ridurrà questa ad altezza *vera*, e con essa si rinverrà la latitudine del luogo, come nel metodo precedente.

596. L'esposto calcolo è fondato sul principio, che allorquando si osservano delle altezze vicine al meridiano, i quadrati degl'intervalli di tempo tra ciascuna osservazione e mezzodì, sono presso a poco proporzionali rispettivamente alle differenze tra ciascuna altezza osservata e l'altezza meridiana.

Sia ABCD (*fig.* 81) il parallelo cui trovisi a percorrere l'astro, BR la proiezione ortografica dell'altezza meridiana, Ex ed Fx' quelle delle altezze prese vicino al meridiano. Si tirino le corde BE e BF, e dai punti E ed F si abbassino le perpendicolari Ey ed Ey'; saranno By e By' le differenze in altezza.

Essendosi osservate altezze molto vicine al meridiano, gli archi si confonderanno con le corde, ed i quadrati di queste essendo proporzionali ai segmenti By e By', conchiuderemo che i quadrati de' tempi sono proporzionali alle differenze in altezze; perciocchè gli archi percorsi da un astro possono essere rappresentati da'tempi impiegati a descriverli.

597. La tavola XXXI somministra i quadrati de'tempi di secondo in secondo da 1″ sino a 12′, onde agevolare l'operazione.

598. Per la tavola XXXII, si è considerato che l'astro per 12′ di tempo in distanza dal meridiano possa avere un movimento equabile in altezza, per cui basta calcolare di quanto la sua altezza meridiana differisce da quella che corrisponde ad 1′ di tempo in distanza dal meridiano, perchè poi questa quantità moltiplicata pel quadrato dell'intero intervallo dedotto in quantità media, darà la totale differenza tra l'altezza meridiana, e la media di quelle osservate.

Adunque nel solito triangolo ZPS facendo costantemente $P = 1'$ bisognava calcolare per tutte le latitudini e per tutte le declinazioni il valore di a; ma è ben sufficiente trovar fatto questo lavoro per le sole declinazioni di cui è suscettibile il sole, di grado in grado, e similmente di grado in grado per tutte le latitudini fino a 70°.

Abbiamo in generale, per le nostre solite notazioni

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\text{sen} \tfrac{1}{2}(l+d+a) \text{sen} \tfrac{1}{2}(l+d-a)}{\text{sen}\, l \,\text{sen}\, d} = \frac{\text{sen} \tfrac{1}{2}(m+a) \text{sen} \tfrac{1}{2}(m-a)}{\text{sen}\, l\, \text{sen}\, d}$$

facendo $m = l + d$; e perciò

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a}{\text{sen}\, l\, \text{sen}\, d}$$ si ponga il numeratore $= \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m\, \text{sen}^2 A$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m\, \text{sen}^2 A}{\text{sen}\, l\, \text{sen}\, d},$$ ed assolando $\text{sen}^2 A$ ed estraendo la radice

$$\text{sen}\, A = \frac{\cos \tfrac{1}{2} P \sqrt{\text{sen}\, l\, \text{sen}\, d}}{\text{sen} \tfrac{1}{2}(l+d)}.$$

Inoltre, abbiamo posto

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m\, \text{sen}^2 A \text{, sarà}$$
$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m\, \text{sen}^2 A$$
$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m (1 - \text{sen}^2 A) = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} m \cos^2 A$$
$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2} a = \text{sen} \tfrac{1}{2} (l + d) \cos A.$$

599. Formate adunque le dette due tavole, il metodo di rinvenire la latitudine per mezzo delle altezze circomeridiane riducesi al breve calcolo seguente.

Esempio.

Il dì 12 luglio 1840, essendo in latitudine stimata 50° N e longitudine 30° OP, sonosi osservato dalla parte del Sud delle altezze ☉ nella sua vicinanza al meridiano, e con istrumento senza errore d'indice; si domanda la latitudine del luogo.

Per osservazione fatta la mattina ad ora opportuna, si è riconosciuto che all'istante calcolato 7^h 11′ 13″ t. v. a bordo, il cronometro segnava 8^h 06′ 29″, e da tale ora sino a quella dell'osservazione per la latitudine si sono percorse miglia 8,3 di appartamento *Est*; l'elevazione dell'occhio era 25 piedi; e l'andamento diurno del cronometro — 36′ 4 sul mezzodì medio.

Ora t. v. del luogo di P (P = angolo orario).		7^h	11′	13″	,00
Diff. di long. da P ad L = 8,3 × 1,56 = 13′					
Idem in tempo.	+	0	00	52	,00
Ora t. v. del luogo di L.		7	12	05	,00
Angolo orario ridotto al luogo L	—	4	47	55	,00
Variazione diurna dell'equaz. del tempo . . .	+	0	00	07	,68
Andamento diurno del cronometro	—	0	00	36	,40
Variazione del cronometro per 24^h di t. v. . .	—	0	00	28	,72
p. p. per 4^h 47′ 55″.	—	0	00	05	,74
Ora t. v. di P ridotto al luogo L.		7^h	12′	05″	,00
Ora del cronometro in tale istante.		8	06	29	,00
Avanzo del cronometro sul t. v. di L.		0	54	24	,00
p. p. per 4^h 47′ 55″, come sopra.		0	00	05	,74
Ora del cronometro a mezzodì.		0	54	18	,26
Declinazione per mezzodì a bordo.	+	21°	58′	05″	,30

Altezze.	*Ore.*	*Intervalli*,	loro *Quadrati.*
61° 44′ 20″	0^h 43′ 22″	10′ 56″	119,5
45 00	44 14	10 04	101,3
45 20	44 40	9 38	92,8
45 40	45 05	9 13	84,9
46 20	45 55	8 23	70,3
26 40		somma =	468,8
61 45 20		moltiplicatore =	93,76

Cambiamento in altezza per 1′ presso il meridiano.				2″,4
prodotto. . .				225″
Correzione per l'altezza media.	+		3′	55″
Altezza media.		61°	45	20
Altezza meridiana osservata ☉.		61	49	05
Depressione	—		5	04
Altezza apparente		61	44	01
Rifrazione — parallasse.	—		0	27
Altezza vera ☉.		61	43	34
Semidiametro	+		15	46
Altezza vera del centro.	+	61	59	20
Distanza ☉ dal polo Sud.	+	111	58	05
Latitudine richiesta	+	49	58	45 Nord.

600. *Metodo delle due altezze.* Per la esecuzione di questo problema sono stati finora proposti moltissimi metodi, i quali oltre all'esser generalmente lunghi contengono delle inesattezze più o meno grandi; noi quindi ci faremo ad esporre il seguente, che se è ugualmente lungo ha il vantaggio di offrire tutta la possibile esattezza, non solo, ma di essere altresì talmente generale, che non sarà necessario adottare due regole diverse pel caso in cui trattisi di due altezze di un medesimo astro, prese in due ore diverse, e pel caso dell'altezze di due astri diversi prese nel medesimo tempo.

Abbiamo di già veduto (518 e 519) come riducesi la minore altezza alla quantità che avrebbe essa avuta se fosse stata osservata dal luogo stesso nel quale si è osservata la maggiore altezza; e ciò ne agevola per modo che possiamo nella seguente dimostrazione e nel calcolo che ne deriva, considerare sempre come se fossero osservate nel medesimo istante le altezze di due astri differenti, ancora quando non si tratta che di un medesimo astro osservato in due ore diverse. Questa ipotesi però suole farsi esclusivamente pel sole e per la luna, che offrono una varietà meno o più significante nella loro declinazione, in ore differenti; ma per le stelle che non variano sensibilmente di declinazione per più giorni di seguito, sarà sempre miglior consiglio osservare nel medesimo tempo, le altezze di due di esse che abbiano sufficiente differenza di declinazione.

Nel dovere adunque esporre il principio teoretico da cui emana il calcolo, adotteremo per semplicità l'ipotesi di avere osservata l'altezza di due astri nel medesimo tempo.

Sia ZP (*fig.* 82) l'arco di meridiano del luogo di osservazione della maggiore altezza, complemento dell'altezza polare, o sia della latitudine di esso luogo; siano S ed S′ i luoghi di due astri de'quali siansi osservate le altezze, i cui complementi sono SZ ed S′Z; e finalmente siano SP ed S′P le distanze de'medesimi dal polo elevato P: se s'intenda passare pe'punti S ed S′ l'arco di cerchio massimo SS′ avremo che i tre triangoli sferici SPS′, SS′Z e ZPS′ potranno menarci alla conoscenza di ZP complemento della latitudine, per la qual cosa questa diverrà nota.

Or l'angolo SPS′, se trattisi di due altezze di un medesimo astro, os-

servate in due ore diverse, sarà rappresentato dall'intervallo, ridotto in gradi, del tempo scorso dall'un'all'altra osservazione; e se trattisi di due astri diversi, sarà indicato dalla differenza delle loro ascensioni rette calcolate per l'istante dell'osservazione; quindi sarà sempre noto, come note sono egualmente le distanze polari SP ed S'P, e le distanze zenittali SZ ed S'Z.

Mettiamo l'angolo $SPS'=t$, $PS=d$, $PS'=d'$, $PS'S=M$, $PSS'=N$, $SS'=c$, $ZS'S=B$, $ZS'P=E$, $SZ=a$, $S'Z=a'$ e $ZP=l$ complemento della latitudine L, avremo

$$1.^\circ\ (279)\begin{cases} \tan\frac{1}{2}(M\sim N)=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(d\sim d')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(d+d')}\cot\frac{1}{2}t \\ \tan\frac{1}{2}(M+N)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(d\sim d')}{\cos\frac{1}{2}(d+d')}\cot\frac{1}{2}t \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-t)}{\operatorname{sen}M\operatorname{sen}N}} \end{cases}$$

$$2.^\circ\ (277,\ 2^a)\ \cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s\operatorname{sen}(\frac{1}{2}s-a)}{\operatorname{sen}a'\operatorname{sen}c}}$$

$$3.^\circ\ (282\text{ e }290)\ \tan\varphi=\tan a'\cos E,\ \text{e}\ \operatorname{sen}L=\frac{\cos a'\cos(d'\sim\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Esempio.

Il dì 6 marzo 1840, a circa 8^h t. v. del mattino con l'occhio elevato dalla superficie del mare per 21 piede, si è osservata un'altezza ☉ 12° 35′ 20″, rilevandolo al compasso azzimuttale per SE $\frac{1}{4}$ E; e dopo aver corso 30 miglia per N 53° 15′ E, si è osservata una seconda altezza ☉ 30° 00′ 40″, con uno strumento senza errore d'indice, all'istante che lo stesso oriuolo segnava 11^h 11′ 32″, ed in luogo stimato in latitudine 52° 15′ N e longitudine 22° 30′ OP. Si domanda la latitudine del luogo della maggiore altezza.

Preparazione del calcolo.

	1.ª *Osservazione.*	2.ª *Osservazione.*
Ora astr. t. v. a bordo	20^h 00′ 00″ ,00	23^h 11′ 32″ ,00
Longitudine in tempo	1 30 00 ,00	1 30 00 ,00
t. v. a Parigi	21 30 00 ,00	24 41 32 ,00
t. m. a m. v. a Parigi il 6	0 11 27 ,46	0 11 27 ,46
diff. in 24 ore = 14″ 34		
p. p. corrispondenti alle ore	− 01 ,49	+ 00 ,41
equaz. sul m. v. per le ore date	+ 11 25 ,97	+ 11 27 ,87
Ora astr. t. m. a Parigi	21 41 25 ,97	24 52 59 ,87
Declinazione ☉ il 6 a Parigi	− 5° 31′ 03″ ,00	− 5° 31′ 03″ ,00
diff. in 24 ore 23′ 17″ ,3		
p. p. per 2^h 19′, e per 0^h 53.	− 0 02 14 ,88	+ 0 00 50 ,46
Declinazione per gl'istanti	− 5 33 17 ,88	− 5 30 12 ,54
	d=95 33 17 ,88	d'=95 30 12 ,54

Altezze osservate ☉.	12° 35′ 20″	30° 00′ 40″
Depressione per 21 piede.	− 04 38	− 04 38
Altezza apparente ☉	12 30 42	29 56 02
Rifr. — parallasse.	− 04 09	− 01 33
Altezza vera ☉.	12 26 33	29 54 29
Semidiametro.	+ 16 08	+ 16 08
Altezza vera centro ☉.	12 42 41	30 10 37
Angolo tra SE $\frac{1}{4}$ E e N 53° 15′ E = 70° 30′		a'=59 49 23
miglia corse 30, dunque riduzione. . . .	+ 10 01	
Altezza minore ridotta al luogo della magg.	12 52 42	
	a=77 07 18	

Intervallo fra le osservazioni.	3^h 11′ 32″
Idem in gradi	t=47° 53′ 00″
	$\frac{1}{2}$ t=23 56 30

Calcolo della latitudine.

$$1.^{o}\begin{cases}\tan \frac{1}{2}(M \sim N) = \dfrac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(d \sim d')}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(d + d')}\cot \frac{1}{2} t \\ \tan \frac{1}{2}(M + N) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(d \sim d')}{\cos \frac{1}{2}(d + d')}\cot \frac{1}{2} t \\ \text{sen}\,\frac{1}{2} c = \sqrt{\dfrac{\cos \frac{1}{2} S \cos(\frac{1}{2} S - t)}{\text{sen}\,M\,\text{sen}\,N}}\end{cases}$$

$d =$	95°	33′	17″	,88				
$d' =$	95	30	12	,54				
$d \sim d' =$	00	03	05	,34				
$\frac{1}{2}(d \sim d') =$	00	01	32	,67	log sen =	6.6525140	log cos =	0.0000000
$d + d' =$	191	03	30	,42				
$\frac{1}{2}(d + d') =$	95	31	45	,21	colog sen =	0.0020254	colog cos =	1.0161327
$t =$	47	53	00	,00				
$\frac{1}{2} t =$	23	56	30	,00	log cot =	0.3526079		= 0.3526079
$\frac{1}{2}(M \sim N) =$	00	03	29	,68	log tan =	7.0071473	log tan =	1.3687406
$\frac{1}{2}(M + N) =$	87	33	00	,99				
$M =$	87	36	30	,67	colog sen =	0.0003784		
$N =$	87	29	31	,31	colog sen =	0.0004162		
$t =$	47	53	00	,00				
$S =$	222	59	01	,98				
$\frac{1}{2} S =$	111	29	30	,99	log cos =	9.5639203		
$\frac{1}{2} S - t =$	63	36	30	,99	log cos =	9.6478724		
						19.2125873		
$\frac{1}{2} c =$	23	49	24	,11	log sen =	9.6062936		
$c =$	47	38	48	,22				

$$2.^{o} \ldots \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2} s\,\text{sen}(\frac{1}{2} s - a)}{\text{sen}\,a'\,\text{sen}\,c}}$$

$c =$	47°	38′	42″	,22	colog sen =	0.1313641
$a' =$	59	49	23	,00	colog sen =	0.0632465
$a =$	77	07	18	,00		
$s =$	184	35	23	,22		
$\frac{1}{2} s =$	92	17	41	,61	log sen =	9.9996516
$\frac{1}{2} s - a =$	15	10	23	,61	log sen =	9.4178671
						19.6121293
$\frac{1}{2} B =$	50	13	15	,08	log cos =	9.8060646
$B =$	100	26	30	,16		
$M =$	87	36	30	,67		
$E =$	12	49	59	,49		

3.° . . . $\tan\varphi = \tan a' \cos E$, e $\operatorname{sen} L = \dfrac{\cos a' \cos(d' \sim \varphi)}{\cos\varphi}$

$a' = 59°$	$49'$	$23''$	,00	log tan = 0.2354687		log cos = 9.7012848
E = 12	49	59	,49	log cos = 9.9890161		
φ = 59	11	22	,03	log tan = 0.2244848		colog cos = 0.2905524
d' = 95	30	12	,54			
$d' \sim \varphi$ = 36	18	50	,51	. . . .		log cos = 9.9062111
L = 52	15	25	,95	*latitudine richiesta* .		log sen = 9.8980483

In questo calcolo potrà per avventura sembrar difficoltoso il ricavar dalle tavole i logaritmi delle funzioni trigonometriche di $d \sim d'$, principalmente quando trattandosi del sole questa espressione rappresenta un arco molto piccolo. Ma a ciò si ovvia facilmente, conoscendo che nell'intervallo di tre o quattr'ore la declinazione del sole non giunge alla variazione di $4'$; e si potrà considerare tanto il seno che la tangente confuso con l'arco, senza incorrere in errore di più di un centesimo di secondo. Laonde aggiungendo al logaritmo del numero di secondi dinotato da $d \sim d'$, il logaritmo dell'arco di $1''$, ch'è uguale 4.6855748, si avrà il logaritmo richiesto. E nel caso inverso, quando avuto dal calcolo il logaritmo di $\tan \frac{1}{2}(M \sim N)$, si domanda l'arco che le corrisponde, si toglierà da questo logaritmo l'altro di $0'',01 = 2.6855748$, ed il numero che corrisponderà al residuo, esprimerà centesimi di secondi. Così per aver prontamente il $\operatorname{sen} 1' \, 32'',67$ abbiamo posto il logaritmo di $92'',67 = 1.9669392 + 4.6855748 = 6.6525140$; ed analogamente a ciò, avuto $\log \tan \frac{1}{2}(M \sim N) = 7.0071473$ abbiamo proceduto nel seguente modo, $7.0071473 - 2.6855748 = 4.3215725$, che corrisponde al numero 20968, il quale dinotando centesimi di secondi, è uguale a $209'',68 = 3' \, 29'',68$. Operazioni che se esigono molte parole di spiega sono però facilissime e spedite nella pratica.

LEZIONE XLIX.

De' principali metodi da rinvenire la longitudine in mare.

601. Il calcolo della longitudine consiste, in tesi generale, nel determinare l'ora vera o l'ora media che conta la nave, e quella che

nell'istante medesimo contasi sotto il meridiano di un luogo qualunque, di cui si conosca con sicurezza la longitudine; poichè si avrà in tal caso la differenza de' meridiani in tempo, e questa ridotta in gradi, ed aggiunta o tolta alla longitudine del luogo, secondo la specie della longitudine del luogo e la specie della navigazione seguita, darà la longitudine della nave.

602. Noi però, all'oggetto di semplificare la cosa, in vece di dar regole per la riduzione de' meridiani riferiremo la longitudine sempre allo stesso primo meridiano; cioè al meridiano dell'Osservatorio di Parigi per lo quale abbiamo l'effemeridi; in guisa che la longitudine della partenza non diremo essere zero, facendo uso della *C. T.*, se non quando il meridiano del punto di partenza sia precisamente quello di Parigi; ed in tutti gli altri casi noteremo espressamente la longitudine del meridiano di partenza rispetto al primo meridiano per noi adottato.

603. E comunque sia del tutto indifferente calcolare la differenza di longitudine in tempo vero o in tempo medio, pure stimiamo conferire alla speditezza conchiudendo il calcolo della longitudine esclusivamente in tempo *vero*; perciocchè, essendo gli elementi tutti calcolati in tempo medio, sul meridiano di Parigi, sarà più agevole convertir questo qualunque esso sia in tempo vero; che non già ridurre in tempo medio l'ora t. v. che si ha dall'osservazione a bordo, per la quale bisognerebbe prima ridurre l'ora t. v. della nave ad ora t. v. a Parigi, ed indi questa a t. m., per ottenere l'ora t. m. di bordo.

604. All'oggetto di conoscere intanto l'ora che si conta a Parigi in un dato istante a bordo, non abbiamo che due soli mezzi ed abbastanza delicati: 1.° Per mezzo del cronometro il quale regolato, prima di partire, sul meridiano di Parigi, se ha un andamento diurno equabile, ci farà conoscer con precisione l'ora che contasi al primo meridiano, mediante il computo del suo stato assoluto, e del suo andamento diurno (431 a 441). 2.° Per mezzo dell'osservazione di un fenomeno istantaneo registrato in dette effemeridi. Per raggiungere questo scopo, essendo in pelago, si è generalmente ricorso alle *distanze lunari*; pe-

rocchè avendo la luna in quantità media un moto proprio di 13° 11′ circa in ogni giorno, o sia di 32′ 56″ in ogni ora, impiega 1′ 49″ di tempo per percorrere 1′ di grado; donde siegue che se un osservatore determina la distanza della luna da un astro in un dato istante, e si conosca in quale ora di Parigi tale distanza deve aver luogo, si potrà dedurre la differenza de'meridiani in tempo, e quindi la longitudine.

605. A questo fine i componenti del *Bureau des longitudes* di Parigi registrano per tutti i giorni dell'anno di tre ore in tre ore di t. m. le distanze della luna dal sole, da' quattro pianeti principali, e da 9 stelle di non grande declinazione; onde possano essere comodamente osservate da entrambi gli emisferi; e le distanze successive da un minuto all'altro riescano a sufficienza sensibili: esse sono α *Ariete, Aldebaran, Polluce, Regolo*, la *Spiga della Vergine, Antares, Altair, Fomalhaut* e *Markab*.

La perfetta conoscenza che si ha oggi giorno de' moti della luna permette la publicazione di tali effemeridi molti anni prima dell'occorrenza, per cui sono esse publicate presentemente con tre anni di anticipazione, mettendo così il marino quasi interamente al coverto dal caso di rimanerne senza. E le distanze lunari vi sono tuttavia date con l'intervallo di 3 ore, perchè si è stimato essere abbastanza equabile il moto della luna in questo spazio di tempo, da poter dedurre, senza tema di errare, la distanza per un'altra ora qualunque, mercè le semplici parti proporzionali (500).

606. *Calcolo della longitudine per mezzo del cronometro.* Il rinvenire la longitudine della nave per mezzo del cronometro riducesi al semplicissimo calcolo di un angolo orario, mediante l'osservazione dell'altezza di un astro; poichè conosciuta così l'ora t. v. dell'istante dell'osservazione a bordo, ed avendo per mezzo del cronometro (440) l'ora t. m. che nello istante medesimo è contata al meridiano dell'Osservatorio di Parigi, si otterrà la differenza de'meridiani, dietro la debita riduzione di quest'ora a tempo vero. Ma non essendo ragionevole a lungo andare, come dopo due o tre mesi, il ritenere per ora esatta di Parigi quella che dal cronometro si deduce, bisognerà limitarsi a far

uso di questo metodo nelle traversate non molto lunghe; e negl' intervalli delle lunghe navigazioni, tra un calcolo di longitudine e l'altro di quegli eseguiti sulle osservazioni delle distanze lunari.

607. Se a bordo invece di un buon sestante di sperimentata esattezza, o di un cerchio di *Troughton*, di ordinanza nella Real Marina, si avesse un cerchio di *Borda* ancora eccellente, sarà d'uopo, in vece di un'altezza, prendere una serie di altezze con una serie di tempi corrispondenti; e ritenere il medio aritmetico delle une e degli altri, come altezza osservata ed ora corrispondente.

Questo magistero delle serie contiene in vero l'errore di supporre i tempi proporzionali alle altezze, circostanza che solamente si verifica nella posizione di sfera retta e nel giorno dell'equinozio (380), e tanto sarà maggiore l'errore quanto maggiore è la differenza algebrica delle declinazioni del sole e dello zenit; perciocchè in tal caso l'angolo fatto dal parallelo dell'astro coll'orizzonte è abbastanza piccolo perchè divenga affatto erronea l'ipotesi succennata.

Se però si rifletta che il circolo di *Borda* è soggetto all'errore di eccentricità, e che questo, per lieve che sia, è nelle latitudini non molto elevate sempre maggiore di quello che può derivare dalla inesatta ipotesi adottata, sarà trovato ragionevole il ripiego delle serie, che mentre non occupa più di 4' o 5', offre il vantaggio di far leggere per l'altezza un arco dello strumento il quintuplo o il sestuplo di essa, onde attenuare l'errore di eccentricità. Adoperando però il cerchio di *Troughton*, il quale ne fa leggere ogni angolo osservato in tre punti della circonferenza alla distanza tra loro di 120° effettivi, o sia di 240° della divisione strumentale, non potremo dubitare di errore di eccentricità, allorchè noteremo per angolo osservato la quantità media delle tre indicate dalle linde A, B, C. Se in fine si faccia l'osservazione con un sestante sarà affatto inutile l'uso delle serie, dovendo la linda percorrere per ogni altezza il medesimo stadio dell'arco graduato, a differenza di ciò che avviene pel cerchio di *Borda*, ove si hanno le altezze per archi in continuazione; per la qual cosa non dovrà essere adoperato il sestante se non sia di conosciuta esattezza; ed in tal caso dovrà esser preferito, avendo, come quasi sempre avviene, un raggio maggiore: condizione

che quasi sempre attenua in modo l'errore di eccentricità da poter comprender questo, in tutta l'estensione dell'arco, nella quantità imputata all'*errore d'indice*.

608. Potrebbe credersi però che l'uso delle serie valesse a compensare le inesattezze derivanti dal poco esercizio nel fare l'osservazione, e nel prendere i confronti, ma noi senza impegnarci a dimostrare che ciò è esagerato, stimiamo consigliare chi avesse premura di far questa verifica, di prendere un esempio di sua soddisfazione da un autore accreditato, e supporre sull'altezza osservata un errore (p. e.) di — 1′ ed un errore di + 2″ sul confronto, cosa poco meno che impossibile per piccola esperienza che si abbia, e si convincerà che questi errori, essendo concorrenti, non adducono sulla longitudine così calcolata un errore di 3′ in arco, i quali bisogna essere alla latitudine di 48° 8′ per esprimer 2 miglia. E questo errore non esiste per lo più che 24 ore; giacchè il calcolo seguente è indipendente dal primo, a diversità di quanto avviene nel punto stimato ove gli errori si accumulerebbero, sebbene non sempre con lo stesso segno, quando non si potesse determinare il punto con le osservazioni astronomiche, che fortunatamente fanno conoscere la latitudine e longitudine della nave sempre indipendentemente da ciò che si è per l'innanti praticato.

609. Tutte queste particolarità, che in sostanza ad altro non tendono se non a confortare il marino onde si renda familiare questo calcolo, e voglia eseguirlo almeno una volta al giorno, mentre il lavorìo che esige il metodo delle serie ha impedito fin oggi che divenisse comune e quotidiano, si possono restringere a che per calcolare la longitudine della nave col sussidio del cronometro, devesi fare una buona osservazione dell'altezza dell'astro, notarne con precisione l'istante, porre tutta l'attenzione nel fare i confronti, e badare essenzialmente a ben dedurre dall'ora del cronometro quella di Parigi.

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo per istima in latitudine 38° 42′ N, avendo piedi 20 di elevazione, ed un sestante che richiede di rettifica + 2′ 30″; si è osservata la mattina un'altezza ☉ 9° 20′. E prendendo due confronti al cronometro, si è trovato che all'istante dell'osservazione esso segnava 8^h 20′ 37″,7; mentre a mezzodì m. di Parigi il dì 6 avanzava di 0^h 07′ 57″,62, secondo la tavola del suo andamento diurno, il qual'è + 26″ 5. Inoltro il barometro indicava 0^m,766; il termometro centigrado + 18°. Si domanda la longitudine della nave.

Ora del cronometro.

1.° confronto	7^h 14′ 26″,2 .	7^h 14′ 26″,2 .	8^h 13′ 00″ . .	8^h 13′ 00″
Osservazione	. . . .	7 22 05 ,2 .	. . . .	φ
2.° confronto	7 23 27 ,7 .	. . . .	8 22 00	
	9 01 ,5 :	7 39 ,0 ::	9 00 :	$x =$ 0 07 37 ,7
Ora del cronometro all'istante dell'osservazione.				$\varphi =$ 8 20 37 ,7

Ora t. v. di Parigi.

Ora del cronometro.		8^h 20′ 37″,70
Avanzo a tutto il mezzodì m. del 6		— 7 57 ,62
Ora astr. prossima t. m. a Parigi		20 12 40 ,08
p. p. per l'avanzo diurno		— 22 ,30
Ora astr. t. m. il dì 6 a Parigi		20 12 17 ,78
t. v. a m. m. a Parigi il 6 = 11′ 27″,57		
diff. in 24 ore = 14″,55		
p. p. per 20^h 12′.	— 12 ,24	
equaz. per l'istante sul m. m. .	11 15 ,33	— 11 15 ,33
Ora astr. t. v. a Parigi		20 01 02 ,45

Declinazione ☉

il dì 5 marzo — 5° 54′ 18″,1
                + 23′ 15″,1
6 marzo — 5 31 03 ,0   + 0′ 04″,4
                + 23 19 ,5
7 marzo — 5 07 43 ,5

Declinazione il dì 6	— 5° 31′ 03″,00
p. p. per 20^h 12′ sopra 23′ 19″,5	+ 0 19 37 ,91
Declinazione per la diff. 1.ª.	— 5 11 25 ,09
Per $\frac{1}{2} \times 20^h = 10^h$ e per + 0′ 04″,4	— 00 ,30
Declinazione per la diff. 2.ª.	— 5 11 25 ,39
	$d =$ 95 11 25 ,39

Altezza ☉

Altezza strumentale ☉			9° 20′ 00″ ,00
Rettifica			+ 02 30 ,00
Altezza osservata ☉			9 22 30 ,00
Depressione per 20 piedi			— 04 32 ,00
Altezza apparente ☉			9 17 58 ,00
Rifr — parall.	— 5′ 34″ ,0		
766 barom.	+ 0 02 ,7		— 05 41 ,20
+ 18° termom.	— 0 09 ,9		
Altezza vera ☉			9 12 16 ,80
Semidiametro centrale			+ 16 08 ,00
Altezza vera ☉			9 28 24 ,80
		$a =$	80 31 35 ,20

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen} \tfrac{1}{2} s \,.\, \text{sen} \left(\tfrac{1}{2} s - a\right)}{\text{sen}\, l \,\text{sen}\, d}}$$

$l =$	51° 18′ 00″,00	colog sen =	0.1076658
$d =$	95 11 25 ,40	colog sen =	0.0017844
$a =$	80 31 35 ,20		
$s =$	227 01 00 ,60		
$\tfrac{1}{2} s =$	113 30 30 ,30	log sen =	9.9623701
$\tfrac{1}{2} s - a =$	32 58 55 ,10	log sen =	9.7358983
			19.8077186
$\tfrac{1}{2} P =$	36 44 03 ,25	log cos =	9.9038593
	× 8		
$P =$	— 4ʰ 53′ 52″,43		
	19 06 07 ,57	ora astr. t. v. a bordo.	
	20 01 02 ,45	ora astr. t. v. a Parigi.	
	0 54 54 ,88	longitudine *Ovest* in tempo.	
	13° 43′ 43″,20	idem in arco.	

610. Supponiamo ora che siasi osservata l'altezza della luna o di un astro qualunque.

Esempio.

Il dì 7 marzo 1840, essendo in latitudine 38° 42' N e avendo piedi 20 di elevazione ed un sestante che richiede di rettifica + 3', si è osservata un'altezza ☽ 58° 43' 40''. Per mezzo de' confronti si è dedotto che in tale istante il cronometro segnava 5^h 43' 25'',96 mentre a mezzodì m. di Parigi il 7 avanzava di 0^h 08' 24'',12 secondo la tavola del suo andamento diurno, il qual'è di + 26'',5: ed inoltre il barometro indicava 0^m766, ed il termometro centigrado + 18°. Si domanda la longitudine della nave.

Ora t. v. di Parigi.

Ora del cronometro	5^h 43' 25'',96
Avanzo a tutto il m. m. del 7	— 08 24 ,12
Ora prossima t. m. a Parigi	5 35 01 ,84
p. p. per l'avanzo diurno	— 00 06 ,16
Ora t. m. il dì 7 a Parigi.	5 34 55 ,68
equaz. sul m. m. per l'istante	— 11 09 ,54
Ora t. v. a Parigi	5 23 46 ,14

AR ☉

AR ☉ a m. m. di Parigi il 7 marzo	23^h 12' 15'',85
Aumento in 24 ore = 3' 41'' ,59	
p. p. per 5^h 35'	+ 51 ,55
AR ☉ per l'istante	23 13 07 ,40

Declinazione ☽

il dì 6 12^h	= + 12° 45' 28'',5		
		+ 3° 00' 26'',4	
7 00	= + 15 45 54 ,9		— 0° 12' 41'',6
		+ 2 47 44 ,8	
7 12	= + 18 33 39 ,7		— 0° 15 45 ,7
		+ 2 31 59 ,1	
8 00	= + 21 05 38 ,8		
		somma =	— 0 28 27 ,30
		½ som =	— 0 14 13 ,65

Declinazione il dì 7	+ 15° 45' 54'',09
differenza in 12^h = 2° 47' 44'' ,8	
p. p. per 5^h 34' 55'' ,68 di Parigi. . . .	+ 1 18 01 ,85
Declinazione per la diff. 1.ª.	+ 17 03 56 ,75
Per 5^h 35' e per — 14'	+ 01 44 ,45
Per 5 35 e per — 14''	+ 00 01 ,80
Declinazione per la diff. 2.ª . . . . D' =	+ 17 05 43 ,00
d' =	72 54 17 ,00

AR ☽

il dì 6 12^h = 20° 22′ 33″,2			
	+ 6° 43′ 46″,6		
7 00 = 27 06 19 ,8		+ 0° 11′ 53″,5	
	+ 6 55 40 ,1		
7 12 = 34 01 59 ,9		+ 0 12 50 ,6	
	+ 7 08 30 ,7		
8 00 = 41 10 30 ,6			
		somma = + 0 24 44 ,1	
		½ som = + 0 12 22 ,05	

AR pel dì 7 marzo		27° 06′ 19″,80
diff. in 12^h = 6° 55′ 40″,1		
p. p. per 5^h 34′ 55″,68 di Parigi		3 13 21 ,58
AR per la diff. 1.ª		30 19 41 ,38
per 5^h 35′ e per + 12′ . . .	— 1′ 29″,50	— 01 32 ,17
per 5 35 e per + 12″ . . .	— 0 02 ,67	
AR per la diff. 2.ª		30 18 09 ,21

Altezza vera ☽

Parall. orizz. del luogo e per l'istante		0° 59′ 24″,48
Semidiametro centrale per l'istante		0 16 12 ,69
Altezza strumentale ☽		58° 43′ 40″,00
Rettifica dello strumento		+ 03 00 ,00
Altezza osservata ☽		58 46 40 ,00
Depressione per 20 piedi		— 04 32 ,00
Altezza apparente ☽		58 42 08 ,00
Parall. — rifraz.	+ 30′ 17″,3	
766 barometro	— 00 00 ,3	+ 30 18 ,00
+ 18° termometro	+ 00 01 ,0	
Altezza vera ☽		59 12 26 ,00
Semidiametro centrale		+ 16 12 ,69
Altezza *vera* centro ☽	A′ =	59 28 38 ,69
	a′ =	30 31 21 ,31

Angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P' = \sqrt{\frac{\text{sen} \tfrac{1}{2} s \ \text{sen} \left(\tfrac{1}{2} s - a' \right)}{\text{sen} \ l \ \text{sen} \ d'}}$$

$l =$	51°	18′	00″	,00	colog sen =	0.1076658
$d' =$	72	54	17	,00	colog sen =	0.0196251
$a' =$	30	31	21	,31		
$s =$	154	43	38	,31		
$\frac{1}{2} s =$	77	21	49	,15	log sen =	9.9893515
$\frac{1}{2} s - a' =$	46	50	27	,84	log sen =	9.8629994
					somma =	19.9796418
$\frac{1}{2} P' =$	12	21	24	,13	colog cos =	9.9898209
$P' =$	+24	42	48	,26	Angolo orario *Ovest*	
	+30	18	09	,21	*AR* ☽	
	+55	00	57	,47	*AR* del meridiano in gradi	
				× 4		
	3h	40′	03″	,83	*AR* del meridiano in tempo	
	−23	13	07	,40	*AR* ☉ per l'istante	
	4	26	56	,43	Ora t. v. a bordo	
	5	23	46	,14	Ora t. v. a Parigi	
	0	56	49	,71	Long. *Ovest* in tempo (542)	56′ 50″,08
	14°	12′	25″	,80	idem in gradi	14° 12′ 31″,20

611. *Della longitudine con le distanze lunari mediante tre osservatori.* Allorchè siasi intrapresa una lunga navigazione, e scorsi due o tre mesi, non è più convenevole fidare nell'andamento del cronometro, poichè bisognerebbe contentarsi di una longitudine errata di 20 o 25′, sorge il bisogno di ottener la longitudine della nave direttamente dalle osservazioni astronomiche. Il migliore de' metodi che possa mettersi in pratica su di un bastimento si è quello di misurar la distanza della luna dal sole, o da una delle 9 stell eriportate all'oggetto dalla *C. T.* o da un pianeta (605).

612. Per le osservazioni relative a questo calcolo è d'uopo ordinariamente il concorso di tre, e talvolta quattro osservatori; de' quali il più esercitato con un cerchio o con un sestante, preferendo sempre lo strumento di raggio maggiore, osserverà la distanza della luna ad un *secondo* astro; altri due provveduti almeno di ottanti osserveranno in pari tempo le altezze de' medesimi astri; ed il quarto munito di una mostra

a secondi, della quale abbia di già preso un confronto col cronometro, ed abbia cura dopo l'osservazione prendere il secondo confronto: in mancanza del quarto osservatore, bisogna che uno de'tre, e meglio quello che s'incarica dell'osservazione della distanza, s'incarichi di notare l'istante preciso dell'osservazione, facendosi tenere da una persona qualunque la mostra a secondi vicino all'orecchio.

613. Questo primo osservatore, avanti di accingersi all'osservazione consulterà la *C. T.* dalla quale mediante la longitudine stimata, dedurrà presso a poco la distanza che deve avere la luna dal secondo astro nell'istante nel quale si è risoluto di osservare (500): e secondo questa distanza presunta situerà l'indice del verniero del suo strumento. Appena postosi ad osservare, situando il piano dello strumento in quello che passando pe' centri de' due astri risulta perpendicolare al grande specchio; o pure, come suol dirsi nella pratica, che passa pe' centri de' due astri e per l'occhio, vedrà entrambi le immagini degli astri nel campo del cannocchiale dello strumento; cioè la diretta dell'uno e la riflessa dell'altro. E quì giova avvertire che sarà sempre miglior consiglio dirigere il cannocchiale all'astro meno luminoso, ed ottenere per riflessione l'immagine di quello di maggior luce.

Avute le due immagini nel campo del cannocchiale darà una voce o un segno di prevenzione agli altri osservatori; e poscia con la vite di richiamo perfezionerà la sua osservazione, conducendo al contatto i lembi de' due astri (520); e nell'atto che questo scopo conseguisce, darà la voce o il segno definitivo agli altri osservatori, i quali si dovranno trovare di aver ciascuno adempiuto contemporaneamente al proprio incarico.

614. Siccome è alquanto difficile ottener la simultaneità nel concorso di tre o quattro osservatori, sarà utile ripetere l'osservazione cinque o sei volte in quanto minor tempo sia possibile, stabilendo quattro serie; cioè *Distanze*, *Altezze della luna*, *Altezza del secondo astro*, *Ore corrispondenti*, e ritenere poi il medio di ciascuna serie come risultamento di unica osservazione, da servire alla esecuzione del calcolo: avvertendo però di scrivere ciascuna distanza corretta di *deviazione*.

615. *Della longitudine con le distanze lunari, mediante un osservatore.* Allorquando un solo osservatore voglia eseguire tutte e tre le osservazioni, dovrà evitare l'istante in cui alcuno di essi passasse per lo meridiano, e cominciare dal prendere prima un'altezza della luna, perciocchè questa di tutti gli astri ha il più lento moto in altezza, da che ha il più celere moto proprio; poi un'altezza del secondo astro, ed in terzo luogo quattro o cinque distanze; quindi una second'altezza del secondo astro, e finalmente una second'altezza della luna; notando in ciascuna delle osservazioni l'ora corrispondente. Il medio delle due altezze della luna, delle due del secondo astro, delle distanze osservate e delle ore, sarà quello da ritenersi rispettivamente per elemento del calcolo. Se il tempo scorso tra l'ora della distanza media, e quella di ciascuna delle due altezze del medesimo astro si è lo stesso, o non differisce che qualche secondi, i medii delle osservazioni potranno esser considerati come osservazioni simultanee; ma se ciò non accade sarà necessario fare la seguente proporzione: *Il tempo scorso fra le due altezze dell'astro sta alla differenza delle altezze, come il tempo scorso tra la prima altezza e l'ora media delle distanze, al quarto termine.* Questo, aggiunto o tolto alla prima altezza, secondo conviene alla circostanza, darà l'altezza dell'astro corrispondente all'ora media delle distanze, o sia all'ora della distanza media; potendosi considerare, senza tema d'incorrere in errore, le altezze proporzionali a'tempi, nell'intervallo di circa 1′ di tempo; differenza che in questo caso difficilmente si arriva ad incontrare tra l'ora media delle due altezze, e l'ora media delle distanze.

616. *Della longitudine con le distanze lunari, calcolando le altezze.* Finalmente, se voglia aversi la longitudine osservando la sola distanza, e ritraendo dal calcolo le altezze degli astri osservati, sarà necessario di determinare l'avanzo o il ritardo di una mostra a secondi sul tempo vero del luogo, prima di venire all'osservazione della distanza, onde essere in grado di dedurre l'angolo orario di ciascuno degli astri con sufficiente esattezza, e con questi poter calcolare debitamente le altezze che loro si corrispondono nell'istante in cui è osservata la distanza.

Si faranno cinque o sei osservazioni di distanza tra la luna ed un

second'astro, notandone rispettivamente gl' istanti, e si sceglierà quella tra esse che meglio soddisfa alla sinteresi dell'osservatore, tanto in riguardo al perfetto contatto de'lembi, quanto in rispetto all'assenza o almeno alla pochezza della deviazione; e di tale distanza con l'ora corrispondente si farà uso pel calcolo.

617. Comunque intanto si proceda per ottenere questa parte degli elementi del calcolo, fa mestieri riflettere, che se vi sono i mezzi di conoscere le altezze vere degli astri allorchè si abbiano le apparenti, e viceversa; dobbiamo necessariamente ricorrere al calcolo per passare dalla conoscenza della distanza apparente a quella della vera; ed indi da questa conchiudere la longitudine del luogo delle osservazioni (500).

Sia HO l'orizzonte (*fig.* 83) e ZH e ZO i verticali che passano per la luna L, e per un secondo astro S nell'atto che si osserva con lo strumento la distanza apparente Δ. Allorchè le altezze apparenti LH ed SO sarannosi corrette, troveremo che i luoghi veri delle altezze dei due astri saranno rispettivamente L' ed S'; e però essere la loro distanza vera rappresentata da L'S', che chiameremo x; e che n'è d'uopo determinare.

Prendendo il valore di cos Z in ciascuno de'due triangoli sferici ZL'S' e ZLS, bisognerà che entrambi i suoi valori si agguaglino, quindi avremo, servendoci delle solite notazioni (522),

$$\frac{\cos x - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} A'}{\cos A \cos A'} = \frac{\cos \Delta - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} B'}{\cos B \cos B'}, \text{ o pure}$$

$$\frac{\cos x + \cos (A + A')}{\cos A \cos A'} = \frac{\cos \Delta + \cos (B + B')}{\cos B \cos B'} \; (274.\ 40.^a), \text{ e perciò}$$

$$-2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (A + A') = \frac{2 \cos \frac{1}{2} s \cos (\frac{1}{2} s - \Delta) \cos A \cos A'}{\cos B \cos B'} \; (274.\ 48^a\ 49^a\ 43^a)$$

e riducendo, dividendo tutto per $\cos^2 \frac{1}{2} (A + A')$, trasponendo e cambiando i segni

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} (A + A')} = 1 - \frac{\dfrac{\cos \frac{1}{2} s \cos (\frac{1}{2} s - \Delta) \cos A \cos A'}{\cos B \cos B'}}{\cos^2 \frac{1}{2} (A + A')}, \text{ o sia}$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \cos \tfrac{1}{2} (A + A') \cos \omega,$$

mettendo l'espressione frazionaria del secondo membro eguale a $\operatorname{sen}^2 \omega$.

618. Questa esattissima formola che porta il nome del suo autore *Borda*, presenta ancora il vantaggio di non esser soggetta a nessun cambiamento di segno; perciocchè la somma della distanza apparente e delle due altezze apparenti non può giugnere a 180°. In fatti abbiamo pel triangolo ZLS

$\Delta < b + b'$ (285), o sia

$\Delta < 90^\circ - B + 90^\circ - B'$, cioè

$\Delta < 180^\circ - (B + B')$, quindi

$\Delta + B + B' < 180^\circ$.

E quando si avverasse che la somma delle due altezze e della distanza apparenti fosse uguale o maggiore di 180° è manifesto che l'arco Δ non può essere più un arco di cerchio massimo: cioè essendosi osservata la distanza, in circostanze tali che il piano che passa pe' centri de' due astri e per l'occhio dell'osservatore, non può senza errore sensibile essere considerato passare per lo centro della terra, l'arco della distanza Δ apparterrà ad un cerchio minore. Ed a fine di ciò evitare, sarà utile non mai avvalersi senza necessità, in questa specie di calcolo, di distanze maggiori di 120°; tanto più che non è di tutta la necessaria sicurezza la misura strumentale di un arco maggiore di tal quantità.

619. Intanto, essendo questo calcolo diretto ad ottenere una specie di punto di ricognizione sulla superficie del globo nelle lunghe navigazioni, stimiamo utile divisamento lo abbandonare la pretensione di compierlo in un sol giorno: e quando la longitudine calcolata discorda oltre i 30′ dalla stimata, rifare il calcolo prendendo per longitudine stimata quella ottenuta dal primo calcolo. Dopo ciò si potrà passare a calcolare la latitudine, e riuscendo questa quasi eguale alla stimata, che in tal caso dev'essere pressochè sicura, altrimenti non potranno mai conseguirsi buoni risultamenti dal calcolo, si potrà riporre giusta confidenza nel *punto* determinato; e si potrà decidere ancora dell'andamento del cronometro; e finalmente prendendo nell'istante dell'osservazione il rilevamento di uno o di ambedue gli astri, si potrà conoscere altresì la declinazione magnetica.

Questo calcolo adunque dovrà essere eseguito con tutta la possibile attenzione e senza fretta, nella mira di avere in mezzo all'oceano un punto di ricognizione, dal quale stabilire un novello punto di partenza.

PROBLEMA GENERALE.

Il dì 7 marzo 1840 nelle ore p. m. essendo per la stima in latitudine 38° 42′ N e longitudine 14° 12′ 31″,2 OP allo istante che il cronometro seguava $5^h\,43'\,25'',96$, si è osservata una distanza ☽—☉ di 45° 56′ 20″ sotto nu' inclinazione all' orizzonte di circa 78°, ed ottenendo il contatto ad $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da' fili, con un sestante che richiede di rettifica + 3′ 00″, ed ha 1° 55′ di angolo de' fili del cannocchiale. E per un calcolo di angolo orario fatto la mattina a $7^h\,17'\,22'',9$ t. m. (541) si è conosciuto essere il cronometro in avanzo sul tempo medio $1^h\,03'\,14'',8$, mentre si era di miglia 22,5 più all' Est del luogo dell' osservazione della distanza: il suo andamento diurno è di + 26″ 5; l' elevazione dell' occhio 20 piedi; il barometro a $0^m\,766$; il termometro centigrado a + 18°. Il sole è stato rilevato al compasso azzimuttale per O 2° 30′ N, e la luna per S 73° 30′ O. Si domanda la latitudine e longitudine del luogo dell' osservazione della distanza, lo stato assoluto del cronometro sul mezzodì medio di Parigi, e la declinazione magnetica.

Per l' ora stimata *t. m. di Parigi, per l' istante dell' osservazione di* Δ.

	Mostra.		Cronometro.	
1.° confronto	$5^h\,37'\,12''$ . .	$5^h\,37'\,12''$ . .	$5^h\,36'\,00''$ . .	$5^h\,36'\,00''$
Osservazione	. . . .	5 44 39 ,2 . . .	. . . .	φ
2.° confronto	5 46 13 ,5 .	. . . .	5 45 00	
	9 01 ,5 :	7 27 ,2 ::	9 00 : x =	0 07 25 ,961
Ora del cronometro all' istante dell' osservazione			φ =	5 43 25 ,96

PREPARAZIONE DEL CALCOLO.

Avanzo del cronometro sul t. m. la mattina.		$1^h\,03'\,14'',80$
Ora prossima t. m. di Δ al meridiano della mattina		4 40 11 ,16
p. p. per l' intervallo delle osservazioni $9^h\,22'\,48'',26$ sopra 26″,5.		— 10 ,36
Ora t. m. di Δ al meridiano della mattina		4 40 00 ,80
Appartamento O 22,5×differenza media 1′,28=diff. long. 28′,48″		
Differenza de' meridiani in tempo, dall' E all' O.		— 01 55 ,20
Ora tempo medio del luogo di Δ		4 38 05 ,60
Longitudine stimata in tempo al luogo di Δ		+ 56 50 ,08
Ora *stimata* t. m. a Parigi.		5 34 55 ,68
t. m. a m. v. a Parigi il dì 7.	$+0^h\,11'\,12'',91$	
Correzione (tav. XXI)	+ 00 ,11	
t. v. a m. m. a Parigi il 7	— 0 11 13 ,02	
Diff. dell' equazione in 24 ore — 14″,96		
p. p. per l' ora di Parigi $5^h\,34'\,55'',68$. .	+ 03 ,48	
equaz. sul m. m. per l' ora della nave. .	— 0 11 09 ,54	— 11 09 ,54
Ora *stimata* t. v. a Parigi		5 23 46 ,14
Ora t. m. di Δ al meridiano del luogo		4 38 05 ,60
equaz. sul m. m. per l' ora della nave		— 11 09 ,54
Ora t. v. a bordo all' istante dell' osservazione di Δ		4 26 56 ,06
		P = 66 44 00 ,90 O

Per la declinazione ☉

il dì 6 marzo — 5° 31′ 03″,0			
	+ 23′ 19″,5		
7 marzo — 5 07 43 ,5		+ 0′ 03″,9	
	+ 23 23 ,4		
8 marzo — 4 44 20 ,1			

Declinazione il dì 7 marzo.	— 5° 07′ 43″,50
p. p. per l'ora di Parigi 5 35′ sopra 23′ 23″,4.	+ 5 26 ,48
Declinazione per la diff. 1.ª	— 5 02 17 ,02
Per $\frac{1}{2} \times 5^h 35' = 2^h 47' 30''$ e per 3″ 9.	— 00 ,40
Declinazione per diff. 2.ª all'istante dato.	— 5 02 17 ,42
	$d =$ 95 02 17 ,42

Ascensione retta del meridiano.

AR ☉ a mezzodì m. 7 marzo a Parigi.	23ʰ 12′ 15″,85
Aumento in 24 ore m., 3′ 41″,59	
p. p. per 5ʰ 35′	51 ,55
AR ☉ per l'istante	23 13 07 ,40
Ora t. v. della nave.	4 26 56 ,06
AR del meridiano del luogo.	3 40 03 ,46
AR del meridiano del luogo.	55° 00′ 51″,90
AR ☉ in gradi.	348 18 51 ,60

Semidiametro ☉

Semidiametro centrale ☉ . . . . =	16′ 08″,00
Per 14° 40′ altezza e 78° inclinazione.	— 03 ,70
Semidiametro inclinato per la distanza	16 04 ,30

Declinazione ☽

il dì 6 12ʰ = + 12° 45′ 28″,5			
	+ 3° 00′ 26″,4		
7 00 = + 15 45 54 ,9		— 0° 12′ 41″,6	
	+ 2 47 44 ,8		
7 12 = + 18 33 39 ,7		— 0 15 45 ,7	
	+ 2 31 59 ,1		
8 00 = + 21 05 38 ,8			
		somma — 0 28 27 ,30	
		metà — 0 14 13 ,65	

Declinazione il dì 7	+ 15° 45′ 54″,90
p. p. sopra + 2 47 44 ,8 per 5ʰ 34′ 55″,68 di Parigi . .	+ 1 18 04 ,85
Declinazione per diff. 1.ª.	+ 17 03 56 ,75
Per 5 35 e per — 14′.	+ 01 44 ,45
Per 5 35 e per — 14″	+ 00 01 ,80
Declinazione per diff. 2.ª	+ 17 05 43 ,00
	$d' =$ 72 54 17 ,00

Ascensione retta ☽

il dì 6 12ʰ	= 20° 22′ 33″,2		
		+ 6° 43′ 46″,6	
7 00	= 27 06 19 ,8		+ 0° 11′ 53″,5
		+ 6 55 40 ,1	
7 12	= 34 01 59 ,9		+ 0 12 50 ,6
		+ 7 08 30 ,7	
8 00	= 41 10 30 ,6		
		somma	+ 0 24 44 ,1
		metà	+ 0 12 22 ,05

AR pel dì 7 marzo		27° 06′ 19″,80
p. p. sopra + 6° 55′ 40″,1 per 5ʰ 34′ 55″,68 di Parigi		3 13 21 ,58
AR per la diff. 1.ª		30 19 41 ,38
per 5ʰ 35′ e per 12′	— 1′ 29″,50	— 01 32 ,17
per 5 35 e per 22″	— 0 02 ,67	
AR per la diff. 2.ª		30 18 09 ,21

Per l'angolo orario ☽

AR ☽	30° 18′ 09″,21	
AR del meridiano	55 00 51 ,90	
P′ =	24 42 42 ,69	Ovest

Per la diff. degli angoli orarî.

AR ☽	30° 18′ 09″,21
AR ☉ (all'Ovest)	348 16 51 ,00
t =	42 01 18 ,21

Pruova.

P′ = 24° 42′ 42″,69 all'Ovest del meridiano.
t = 42 01 18 ,21 ☉ all'Ovest della ☽
P = 66 44 00 ,90 all'Ovest del meridiano (vedi il valore di P).

Semidiametro ☽

Ora astr. t. m. a Parigi il dì 7	5ʰ 34′ 55″,68
Semidiametro il dì 7 a mezzodì	0° 16′ 12″,60
il dì 7 a mezzanotte	0 16 12 ,80
Differenza in 12 ore	+ 00 00 ,20
p. p. per 5ʰ 35′	+ 00 00 ,09
Semidiametro centrale per l'istante dato	0 16 12 ,69
Aumento per 59° altezza	+ 14 ,30
Semidiametro prossimo in altezza	0 16 26 ,99
Diminuz. per rifraz. a 59° altezza e 78° inclinaz.	— 00 ,32
Semidiametro inclinato per la distanza	0 16 26 ,67

Parallasse ☽

Ora astr. t. m. il dì 7 a Parigi	$5^h\ 34'\ 55''$,68
Parallasse equat. a mezzodì 7	$0^\circ\ 59'\ 28''$,60
a mezzanotte	0 59 29 ,90
Differenza in 12 ore	+ 00 01 ,30
p. p. per $5^h\ 35'$	+ 00 00 ,60
Parallasse equat. per l'istante dato	0 59 29 ,20
Diminuzione per 39° latitudine.	— 04 ,72
Parallasse oriz. pel luogo e per l'istante. . .	0 59 24 ,48

Distanza apparente ☽ ☉

Distanza strumentale de' lembi		45 56 20 ,00
Rettifica		+ 03 00 ,00
Distanza osservata		45 59 20 ,00
Angolo de' fili . .	115' 00''	
Contatto ad $\frac{1}{4}$ . .	28 45	
Centro	57 30	
Deviazione per. .	28 45 ed angolo 45° 59'.	— 06 ,46
Distanza osservata corretta.		45 59 13 ,54
Semidiametro inclinato ☉		+ 16 04 ,30
Semidiametro inclinato ☽		+ 16 26 ,67
Distanza *apparente*.	A =	46 31 44 ,51

PER LA LONGITUDINE.

Altezza ☉

$$\tan\varphi = \tan l \cos P\text{, e sen } A = \frac{\cos l \cos (d \sim \varphi)}{\cos\varphi}$$

l = 51° 18' 00'' ,00	log tan = 0.0962856 . . .	log cos = 9.7960486
P = 66 44 00 ,90	log cos = 9.5966044	
φ = 26 14 43 ,99	log tan = 9.6928900 . .	colog cos = 0.0472526
d = 95 02 17 ,42		
$d \sim \varphi$ = 68 47 33 ,43	. . . .	log cos = 9.5584021
A = 14 36 22 ,67	Altezza *vera*	log sen = 9.4017033
+ 03 36 ,65	Rifraz. — parall. . . + 3' 32'',00 766 barometro . . . — 0 01 ,75 + 18° termometro. . + 0 06 ,40	
14 39 59 ,32	Altezza apparente prossima	
+ 03 35 ,25	Rifraz. — parallasse	
B = 14 39 57 ,92	Altezza *apparente* centro ☉.	

Altezza ☽

$$\tan\varphi = \tan l \cos P', \text{ e sen } A' = \frac{\cos l \cos (d' \sim \varphi)}{\cos\varphi}$$

$l =$	51°	18′	00″	,00	log tan = 0.0962856 . . . log cos = 9.7960486
$P' =$	24	42	42	,69	log cos = 9.9582875
$\varphi =$	48	35	25	,56	log tan = 0.0545731 . . colog cos = 0.1795114
$d' =$	72	54	17	,00	
$d' \sim \varphi$	24	18	51	,44	. . . . log cos = 9.9596616
$A' =$	59	28	40	,40	Altezza *vera* (542). . . . . log sen = 9.9352216
$A' =$	59	28	40	,40	colog cos = 0.2942467
$p =$	00	59	24	,48	
$A' - p =$	58	29	15	,92	
$\frac{1}{2}(A' - p) =$	29	14	37	,96	log sen = 9.6888894
$A' + p =$	60	28	04	,88	
$\frac{1}{2}(A' + p) =$	30	14	02	,44	log cos = 9.9365017
					log 2 = 0.3010300
$a =$	58	58	02	,87	log tan = 0.2206678
					Rifraz. per altezza 59°. . + 35″ ,00
		+ 35		,74	766 barometro . . . . . . — 00 ,31
					+ 18° termometro . . . + 01 ,05
$B' =$	58	58	38	,61	Altezza *apparente* centro ☽.

Calcolo della distanza vera.

$B =$	14°	39′	57″	,92	colog cos = 0.0143860
$B' =$	58	58	38	,61	colog cos = 0.2878756
$\Delta =$	46	31	44	,51	
$s =$	120	10	21	,04	
$\frac{1}{2} s =$	60	05	10	,52	log cos = 9.6978356
$\frac{1}{2}(s - \Delta) =$	13	33	26	,01	log cos = 9.9877271
$A =$	14	36	22	,67	log cos = 9.9857324
$A' =$	59	28	40	,40	log cos = 9.7057533
$A + A' =$	74	05	03	,07	somma = 19.6793100
					½ som = 9.8396550
$\frac{1}{2}(A + A') =$	37	02	31	,53	colog cos = 0.0978920
$\omega =$	60	00	13	,49	log sen = 9.9375470
$\omega =$	60	00	13	,49	log cos = 9.6989208
$\frac{1}{2}(A + A') =$	37	02	31	,53	log cos = 9.9021080
$\frac{1}{2}\Delta =$	23	31	08	,00	log sen = 9.6010288

Dist. *vera* A = 47 02 16 ,00
1° 26′ 19″ ,00 log p = 0.31918
C. T. il dì 7 3^h = 45 35 57 ,00
1 40 17 ,00 log p = 0.25404
6^h = 47 16 14 ,00

p. p. per la distanza vera	2^h 34′ 55″ ,68 log p = 0.06514
Ora della 1.ª distanza.	3 00 00 ,00
Ora t. m. a Parigi.	5 34 55 ,68
equaz. sul m. m.	— 11 09 ,54
t. v. a Parigi	5 23 46 ,14

Angolo orario ☉

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} s \text{ sen } (\tfrac{1}{2} s - a)}{\text{sen } l \text{ sen } d}}$$

l = 51° 18′ 00″ ,00	colog sen =	0.1076658
d = 95 02 17 ,42	colog sen =	0.0016812
a = 75 23 37 ,33		
s = 221 43 54 ,75		
$\frac{1}{2} s$ = 110 51 57 ,37	log sen =	9.9705404
$\frac{1}{2} - a$ = 35 28 20 ,04	log sen =	9.7636589
	somma =	19.8435463
$\frac{1}{2}$P = 33 22 00 ,51	log cos =	9.9217731
×8		

P = 4^h 26′ 56″ ,06 *tempo vero a bordo.*

Avendo con l'altezza ☉ calcolata l'ora a bordo di 4^h 26′ 56″ ,06, e con l'altezza ☽ (542) similmente di 4^h 26′ 56″ ,06, si ha per la longitudine

Ora t. v. a Parigi.	5^h 23′ 46″ ,14	5^h 23′ 46″ ,14
t. v. a bordo, pel ☉.	4 26 56 ,06; per la ☽	4 26 56 ,06
Longitudini in tempo.	0 56 50 ,08	0 56 50 ,08
Longitudini in arco.	14° 12′ 31″ ,20	14° 12′ 31″ ,20

$$\tan \tfrac{1}{2}(M \sim N) = \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(d \sim d')}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(d + d')} \cot \tfrac{1}{2} t$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(M + N) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(d \sim d')}{\cos \tfrac{1}{2}(d + d')} \cot \tfrac{1}{2} t$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2} S \cos (\tfrac{1}{2} S \sim t)}{\operatorname{sen} M \operatorname{sen} N}}$$

$d =$	95	02	17	,42			
$d' =$	72	54	17	,00			
$d \sim d' =$	22	08	00	,42			
$\tfrac{1}{2}(d \sim d') =$	11	04	00	,21	log sen= 9.2831928		log cos=9.9918479
$d + d' =$	167	56	34	,42			
$\tfrac{1}{2}(d + d') =$	83	58	17	,21	colog sen= 0.0024087		colog cos=0.9787112
$t =$	42	01	18	,21			
$\tfrac{1}{2} t =$	21	00	39	,10	log cot= 0.4155766		log cot=0.4155766
$\tfrac{1}{2}(M \sim N) =$	26	40	54	,11	log tan= 9.7011781		log tan=1.3861357
$\tfrac{1}{2}(M + N) =$	87	38	46	,84			
$M =$	114	19	40	,95	colog sen= 0.0403854		
$N =$	60	57	52	,73	colog sen= 0.0583294		
$t =$	42	01	18	,21			
$S =$	217	18	51	,89			
$\tfrac{1}{2} S =$	108	39	25	,94	log cos= 9.5050216		
$\tfrac{1}{2} S \sim t =$	66	38	07	,73	log cos= 9.5983303		
					som =19 2020667		
$\tfrac{1}{2} c =$	23°	31′	08″	,92	log sen= 9.6010333		
$c =$	47	02	17	,84			

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s \,.\, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2} s - a)}{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} c}}$$

$c =$	47°	02′	18″	,84	colog sen = 0.1356021
$a' =$	30	31	19	,60	colog sen = 0.2942467
$a =$	75	23	37	,33	
$s =$	152	57	14	,77	
$\tfrac{1}{2} s =$	76	28	37	,38	log sen = 9.9877898
$\tfrac{1}{2} s - a =$	1	05	00	,05	log sen = 8.2766192
					somma = 18.6942578
$\tfrac{1}{2} B =$	77	09	00	,51	log cos = 9.3471289
$B =$	154	18	01	,02	
$M =$	114	19	40	,95	
$E =$	39	58	20	,07	

$$\tan\varphi=\tan a'\cos E,\ \text{e}\ \text{sen}\,L=\frac{\cos a'\cos(d'\sim\varphi)}{\cos\varphi}$$

a' =	30°	31′	19″	,60	log tan = 9.7704901	log cos = 9.9352261
E =	39	58	20	,07	log cos = 9.8844305	
φ =	24	18	43	,87	log tan = 9.6549206	colog cos = 0.0403312
d' =	72	54	17	,00		
$d'\sim\varphi$ =	48	35	33	,13	. . . .	log cos = 9.8204705
L =	38	41	52	,09 *latitudine*	. . . . . .	log sen = 9.7960278

VERIFICA DEL CRONOMETRO.

Ora t. m. di Parigi dedotta dalla distanza lunare. . . .	5^h 34′ 55″ ,68
Ora stimata t. m. di Parigi, mercè il cronometro . . .	5 34 55 ,68
Variazione dell'andamento del cronometro.	00 ,00

PER LA DECLINAZIONE MAGNETICA.

Azzimutto osservato del ☉. . .	— 92° 30′. . .	della ☽. .	— 73° 50′
Azzimutti calcolati (569) . . .	— 71 02		— 51 53
Declinazione del ago.	— 21 28 (NO)		— 21 37 (NO)

620. *Opportunità dell'osservazione*. Or se supponiamo un errore in una delle altezze apparenti, avremo che nel triangolo LZS (*fig.* 83) l'errore commesso sopra una delle altezze apparenti B o B′ verrà trasmesso inversamente ma per intero sulla corrispondente distanza zenittale b o b', per la qual cosa il valore dell'angolo Z ne verrà alterato della quantità $dZ=\frac{db\times\cot S}{\text{sen}\,b}$, o pure $dZ=\frac{db'\times\cot L}{\text{sen}\,b'}$ (298); e lasciando la doppia dizione, intenderemo detto per entrambi le altezze, ciò che si dirà per la prima. Adoperando quindi il valore di Z nel triangolo L′ZS′ per ottenere il valore di x, questo sarà necessariamente affetto di errore avente lo stesso segno dell'errore di Z (303), e sarà $dx=dZ\times\text{sen}\,S\,\text{sen}\,a$. Ma dovendo esistere sulla vera distanza zenittale a l'errore medesimo di cui è affetta la distanza zenittale b, siegue che la distanza vera x sarà nel medesimo tempo alterata dall'altro errore proveniente da quello di a, che chiameremo x'; cioè per la quantità $dx'=da\cos S$ (300). Laonde avremo pel primo triangolo

$dZ=\frac{db\cot S}{\text{sen}\,b}$, e pel secondo

$dx=dZ\,\text{sen}\,S\,\text{sen}\,a$, e sostituendo il valore di dZ

$$dx = \frac{db \cot S}{\operatorname{sen} b} \operatorname{sen} S \operatorname{sen} a = \frac{db \cos S \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}.$$

Inoltre $dx' = da \cos S$, e dividendo la prima per la seconda equazione

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{db \operatorname{sen} a}{da \operatorname{sen} b};$$

ma il secondo membro è senza errore sensibile eguale all'unità, dunque sarà $dx = dx'$. E finalmente osservando che dx porta sempre lo stesso segno di dZ, mentre dx' ne ha sempre il segno contrario (303 e 299), conchiuderemo, che i due errori provenienti alla distanza vera dall'altezza apparente e dall'altezza vera si distruggono tra loro; e semprechè l'errore sia lieve in guisa da poter considerare $db \operatorname{sen} a = da \operatorname{sen} b$, l'errore commesso sull'altezza non influirà sul calcolo della distanza vera.

621. Bisogna inoltre avvertire che le parti proporzionali prese la mercè de' logaritmi logistici, per rinvenire l'istante preciso di Parigi relativo alla distanza vera calcolata a bordo, quantunque siano a sufficienza esatte ne' casi ordinarî, pure nelle circostanze nelle quali le differenze prime delle distanze lunari date dalla *C. T.* da 3^h in 3^h, siano minori delle differenze seconde riescono poco precise, e danno un errore che talvolta giunge sino a 20′ in gradi sulla longitudine, principalmente quando l'ora corrisponde verso la metà dell'intervallo della tavola; circostanza per altro che si può preventivamente riconoscere, e quindi evitare.

622. Finalmente è d'uopo persuadersi che la longitudine calcolata col mezzo della distanza lunare, a malgrado di tutta l'esattezza che possa usarsi, avrà spesso un errore di 10′, ed in niun caso si potrà averne sicurezza in limiti più ristretti di 4′ o 5′ circa. Così perchè le distanze lunari somministrate dalla *C. T.*, ad onta della esattezza delle tavole che oggi si posseggono relative a' moti della luna, contengono degli errori, che se di rado giungono a 20″ sono però quasi sempre ne' limiti d'8″ a 10″: e sì ancora chè per rapporto allo schiacciamento della terra, oltre alla correzione eseguita sulla parallasse, sarebbe mestieri eseguirne altra sulla distanza vera; la quale abbiamo trascurata, perchè appena può elevarsi a 6″, e n'è abbastanza fastidioso il calcolo.

LEZIONE L.

Verificare l'andamento del cronometro.

623. Siccome la prudenza esige di non abbandonarci alla fiducia della invaribilità dell'andamento del cronometro (441), e n'è indispensabile procedere a verificare , sempre che le circostanze lo permettono , se mai abbia sofferto variazione alcuna ; così bisogna indicar di proposito quali sono i mezzi più acconci al conseguimento di tale scopo ; quantunque due di essi già siano stati da noi incidentalmente avvertiti.

624. *Per mezzo dell'angolo orario*. Semprechè si ha l'opportunità di rimanere per più giorni in porto di cognita longitudine, si calcoli un angolo orario, in circostanze favorevoli, mediante un'altezza del sole o della luna (541 e 542) e si deduca l'*avanzo* o il *ritardo* del cronometro sul meridiano del luogo; indi con la differenza di longitudine in tempo tra questo meridiano e quello di Parigi, si conchiuda per lo stato assoluto del cronometro; se questo corrisponde allo stato assoluto che si desume regolarmente dalla tavola del suo andamento diurno (440), il cronometro si sarà mantenuto equabile: nell'altro caso si stabilirà un nuovo *stato assoluto* ed un nuovo *andamento diurno*.

Trattandosi però di cosa tanto rilevante quale si è quella di giudicare dello stato assoluto e dell'andamento diurno del cronometro, sarà necessario prendere almeno quattro o cinque altezze, onde avere dal calcolo altrettante volte le medesime cose, e conchiudere poi per concervo dello stato assoluto e dell'andamento del cronometro sul meridiano di Parigi.

Avendo l'opportunità di rimanere molti giorni nel medesimo porto, si ripeterà lo stesso calcolo più volte a 6 o 7 giorni di distanza l'una dall'altra, onde conchiudere sopra un intervallo maggiore di tempo, ed avere un medio meglio assicurato.

625. Potendo avvenir la disgrazia che avendo un sol cronometro, per una circostanza qualunque siasi mancato di caricarlo in un gior-

no, o postergata di molte ore questa operazione, si potrà adottare lo stesso metodo testè descritto, mercè la precauzione che essendo a veggente di terra di ben cognita longitudine, si vada con la nave a prendere lo stesso meridiano del luogo già riconosciuto. Quando però avvenisse in alto mare un simile caso non vi sarebbe altro metodo che ricorrere alle distanze lunari.

626. *Per mezzo delle distanze lunari.* Avendo di già esposto questo metodo (619) ci rimane solamente ad avvertire, che oltre al dovere eseguire in tal caso con tutta la possibile esattezza il calcolo, sarebbe necessario ripeterlo dopo tre o quattro giorni. Ma non sapremmo in nessun modo consigliare d'intraprendere viaggi molto lunghi, come lo attraversare un grande oceano senza essere forniti almeno di tre o quattro di tali macchine.

627. *Per mezzo delle altezze corrispondenti.* Il metodo delle altezze corrispondenti comechè sia preferibile a quello dell'angolo orario, ha però lo stesso inconveniente di non potersi eseguire che a terra, o essendo all'ancora. Esso consiste nell'osservare la mattina un'altezza del sole prendendone l'istante al cronometro per mezzo de' confronti; ed indi notare l'altro istante del cronometro, nel quale il sole trovasi alla medesima altezza nelle ore vespertine.

È ben chiaro che se il sole non avesse cangiamento di declinazione i due triangoli ZPS e ZPS′ (*fig.* 84), dall'una e dall'altra parte del meridiano PZM, sarebbero eguali e simili; perciocchè sarebbero eguali le distanze polari SP ed S′P, come eguali sono le distanze zenittali ZS e ZS′, perchè eguali le altezze; e quindi gli angoli orarî ZPS e ZPS′ sarebbero eguali, e la metà dell'intervallo di tempo fra le due osservazioni deciderebbe dell'istante che il cronometro trovavasi a segnare nell'istante del *mezzodì vero.* Ma se la declinazione S*n* del mattino non è uguale alla declinazione S′*r* della sera, sarà $PS \pm dPS = PS'$, essendo sempre picciolissima la differenza che potrà incontrarsi: si avrà il segno $+$ quando il sole sembrerà percorrere i segni discendenti, ed il segno $-$ quando lo vediamo ne' segni ascendenti.

Or noi abbiamo $\pm dP = \frac{\pm dPS \cot S}{\text{sen}(PS \pm dPS)}$ (298) $= \frac{\pm dPS \cot S}{\text{sen} PS'}$, ed inoltre $\cos \frac{1}{2} S = \sqrt{\frac{\text{sen} \frac{1}{2} s \, \text{sen}(\frac{1}{2} s - l)}{\text{sen}\, a \, \text{sen}\, d}}$; noto adunque il valore dell'angolo di posizione S, sarà noto ancora quello di dP, la cui metà ridotta in tempo ed applicata all'ora prossima del cronometro a mezzodì vero, dedotta dalla conoscenza de' due angoli orarî, darà l'ora precisa che il cronometro segnava a *mezzodì vero*. Laonde per semplificare il calcolo, ed ottenere direttamente x correzione in tempo da farsi all'ora prossima del cronometro a mezzodì vero, faremo $x = \frac{\pm dPS \cot S}{30 \, \text{sen} PS'}$.

Il segno di dP dovrebbe essere lo stesso di quello di dPS, quando l'angolo di posizione S fosse ottuso (299) e dovrebbe dP avere il segno contrario di dPS quando l'angolo fosse acuto; ma essendo dP applicato all'angolo ZPS, angolo orario del mattino, e quindi negativo rispetto al mezzodì prossimo, si avrà inversamente, che dP, e per esso *la correzione* x *avrà lo stesso segno di* dPS *quando l'angolo in* S *è acuto, ed avrà il segno contrario quando l'angolo in* S *è ottuso.*

Esempio.

Nel dì 25 agosto 1840, essendo in latitudine 44° 50′ 48″ N e longitudine 17° 54′ 15″ OP, si è osservata la mattina un'altezza del sole 46° 47′ 45″ all'istante che al cronometro leggevasi 10^h 05′ 56″ secondo si è dedotto per mezzo dei confronti; e nelle ore vespertine è giunto il sole alla medesima altezza quando il cronometro indicava 1^h 54′ 04″: si domanda l'ora precisa che esso segnava all'istante del *mezzodì vero;* ed il suo rapporto sul tempo vero e sul tempo medio del luogo.

	Ore.		*Dist. polari.*
Ora della mattina.	10^h 05′ 56″	. . . . SP =	79° 18′ 55″ ,83
Ora della sera + 12^h	13 54 04	. . . . S′P =	79 22 14 ,28
Intervallo . . =	3 48 08	. . . + *d*PS =	00 03 18 ,45
somma . . =	24 00 00		
Ora pross. cronom. a m. v. =	12 00 00		

$$\cos \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} s - l\right)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} d}}$$

$a =$	43° 12′ 15″ ,00	colog sen =	0.1645630
$d =$	79 18 55 ,83	colog sen =	0.0075954
$l =$	45 09 12 ,00		
$s =$	167 40 22 ,83		
$\frac{1}{2} s =$	83 50 11 ,41	log sen =	9.9974823
$\frac{1}{2} s - l =$	38 40 59 ,41	log sen =	9.7958894
		somma =	19.9655301
$\frac{1}{2}$ S =	16 02 06 ,83	log cos =	9.9827650
S =	32 04 13 ,66		

$$+ x = \frac{+ dPS \cot S}{30 \operatorname{sen} PS'}$$

*d*PS =	00° 03′ 18″ ,45	log =	2.2976511
S =	32 04 13 ,66	log cot =	0.2030231
PS′ =	79 22 14 ,28	colog sen =	0.0075168
		colog 30 =	8.5228788
$+ x =$	10″,74162.	log =	1.0310698

Ora pross. del cronometro a m. v.	12^h 00′ 00″ ,00
Correzione . . . . x =	+ 00 00 10 ,74
Ora del cronometro a *mezzodì vero*	12 00 10 ,74
Avanzo del cronometro sul mezzodì vero.	00 00 10 ,74
equazione sul m. v.	+ 1 48 ,00
Ritardo del cronometro sul mezzodì medio	00 01 37 ,26

628. Onde questo metodo riesca di sufficiente precisione, bisognerà che le altezze non siano osservate quando il sole è poco distante dal meridiano, ed il suo movimento in altezza sia perciò divenuto abbastanza lento, perchè lo strumento non offra differenza visibile per più secondi di tempo in continuazione, e diventi difficile il definire l'istante preciso al quale ciascuna di esse corrisponde; ma sarà utile praticare l'osservazione allor quando il sole abbia per lo meno $1^h 30'$ di angolo orario.

Ed essendo diretto questo calcolo alla verifica del cronometro non si dovrà esitare ad osservare tre o quattro coppie di altezze corrispondenti, onde ottenere altrettanti risultamenti, ed indi prendere il medio di questi per l'ora segnata dal cronometro a *mezzodì vero*. Ripetendo la medesima osservazione ogni tre o quattro giorni, secondo le circostanze permetteranno, si potrà decidere in coacervo dell'andamento diurno del cronometro, e del suo stato assoluto rispetto prima al meridiano del luogo delle osservazioni, e poscia a quello di Parigi al quale sarà mestieri che il cronometro sempre si riferisca, ond'evitare ne'calcoli una continua e penosa complicazione.

FINE.

ELENCO DELLE PRINCIPALI FORMOLE.

Pel punto stimato.

Per l' errore sull' ampolletta $x = \frac{a \times 30}{m}$.

Per l' errore sul cordino $x = \frac{a \times n}{45}$.

Per l' errore di entrambi $x = \frac{2}{3}\, a \times \frac{n}{m}$.

$\tan \text{Rombo} = \frac{\text{appartamento}}{\text{diff. latitudine}}$.

$\text{Distanza navigata} = \frac{\text{diff. latitudine}}{\cos \text{rombo}}$

Diff. longitudine = appartamento $\times$ diff. media

Per l' altezza di un astro

$\tan \varphi = \tan l \cos P$, e $\operatorname{sen} A = \frac{\cos l \cos (d \backsim \varphi)}{\cos \varphi}$.

Per l' angolo orario.

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s \operatorname{sen} (\frac{1}{2} s - a)}{\operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}}$$

Ora del sorgere e tramontare.

Pel sorgere $\pm \cos \pi = \tan D \tan L$.
Pel tramonto $\mp \cos P = \tan D \tan L$.

Per l' azzimutto.

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s \operatorname{sen} (\frac{1}{2} s - d)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} l}}.$$

Per l' amplitudine.

$\operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} D}{\cos L}$.

Per l' astro al primo verticale.

$\operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} L}$.

$\cos P = \tan D \cot L$.

Per l'angolo di posizione.

$$\cos \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} s - l)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} d}}$$

se S è retto.

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} D}.$$

$$\cos P = \tan L \cot D.$$

$$\cos Z = \tan L \cot A.$$

Per la latitudine.

$\pm$ latitudine $=$ $\pm$ dist. polare della stessa specie dell'osservazione $\mp$ altezza meridiana.

per mezzo di due altezze.

$$1.° \begin{cases} \tan \tfrac{1}{2} (M \sim N) = \dfrac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (d \sim d')}{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (d + d')} \cot \tfrac{1}{2} t \\ \tan \tfrac{1}{2} (M + N) = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2} (d \sim d')}{\cos \tfrac{1}{2} (d + d')} \cot \tfrac{1}{2} t \\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\dfrac{\cos \tfrac{1}{2} S \cos (\tfrac{1}{2} S - t)}{\operatorname{sen} M \operatorname{sen} N}} \end{cases}$$

$$2.° \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} s - a)}{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} c}}$$

$$3.° \tan \varphi = \tan a' \cos E, \text{ e } \operatorname{sen} L = \frac{\cos a' \cos (d' \sim \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Per la longitudine.

$$\operatorname{sen} \varpi = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos \tfrac{1}{2} s \cos (\tfrac{1}{2} s - \Delta) \cos A \cos A'}{\cos B \cos B'}}{\cos \tfrac{1}{2} (A + A')}}$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \cos \tfrac{1}{2} (A + A') \cos \varpi.$$

Per l'altezze corrispondenti.

$$\cos \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} s - l)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} d}}$$

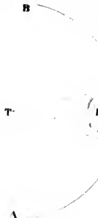
$$x = \frac{dPS \cot S}{30 \operatorname{sen} PS'}.$$

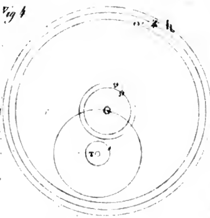
CORREZIONI E RETTIFICHE.

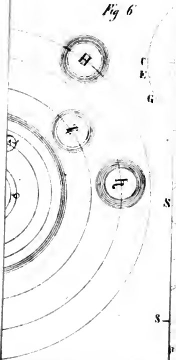
pag. 12 verso	4	in linea retta	quasi in linea retta
79	14	ed AS	ed HS
id.	17	Ev	Dv
id.	18	Dv	Ev
80	20	che hanno per vertice il	che s' incontrano al
86	19	LE	KE
95	4	(154)	(155)
96	3	(155)	(156)
120	22	a BC	ad AD
135	12	(12 e 18)	(21 e 18)
142	5	$1 - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c$	$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$
154	1	B'CA'	BCA'
164	28	fmv	$f = mv$
id.	25	infinita	infinitesima
175	24	HKG	HKG (*fig.* 54)
182	34	cos A	A
199	22	(370. 5°)	(376. 5°)
202	33	maggiore	minore
206	2	arco Bv.	arco Bv. Inoltre abbiamo B$v = m$ON rifrazione terrestre corrispondente a tutta la lunghezza dell' arco terrestre BN $= d$, quindi la rifrazione terrestre relativa al punto N sarà rappresentata da nd.
216	21	centripreta	centripeta
232	21	t. m. a m. v. a bordo	equaz. sul m. v. per l'istante
id.	38	t. m. a m. v. pel ec.	equaz. sul m. m. per l'istante.
233	26	4 12 30 ,68	(*Questa quantità è data dalla* C. T. *dal 1840 in poi*)
262	19	lat ☽	long ☽
292	20	sul	perpendicolare al
312	23	del giorno astronomico corrente	rispetto al mezzodì prossimo
318	8	$\frac{1}{2} s\ a'$	$\frac{1}{2} s - a'$
336	32	si considera il giorno astronomico	sono contati dal mezzodì prossimo



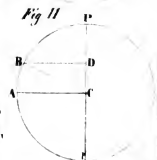
Tav. I.












NAPOLI

Fig. 14

Fig. 11

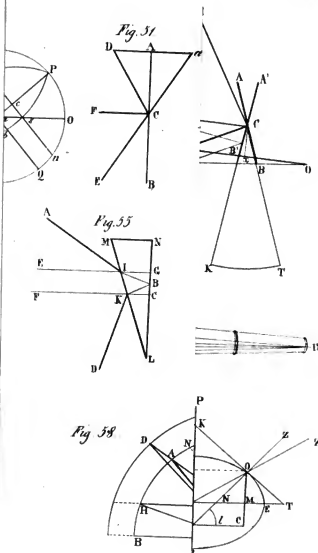
Lit. Gatti e Dura Roma 18..




NAPOLI




NAPOLI



Lit. Gatti e Dura Napoli 1842.



Fig. 63.

Fig. 65.

Fig. 67

68.

Fig. 71

(*) Il ...









